昭和38年７月２日第３種郵便物認可
2006年７月１日発行　第44巻７号　毎月１回１日発行
ISSN 0386—2240

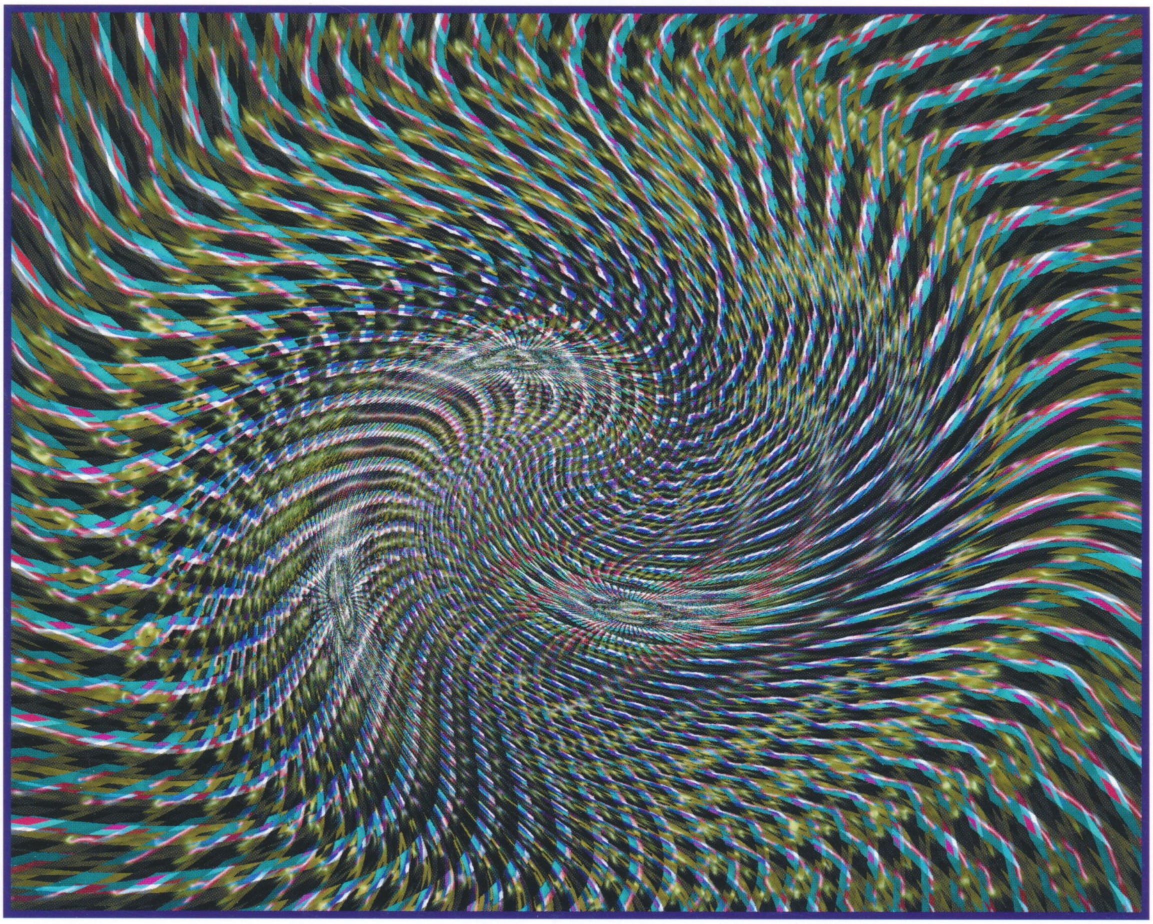
数理科学

7
2006

特集

重力は語る

時空，弦，量子，宇宙との対話



No.517

サイエンス社

臨時別冊・数理科学（SGC ライブラリ-47：for Senior & Graduate Courses）

現代物理数学への招待

ランダムウォークからひろがる多彩な物理と数理

鈴木　淳史　著

本体 1876 円　　送料 290 円　　表示価格は税抜きです

ランダムウォークの考察から現れてくる，現代物理数学の様々な項目を解説．諸項目が，ランダムウォークを通じて有機的につながり，物理が数学によっていかに有効に記述されるかが肌で感じられるような構成となっている．諸項目が並列に網羅された従来の本とは一味違った，“物理数学 advanced course” のテキスト．

サイエンス社

Springer
the language of science

springer-tokyo.co.jp



量子の鼓動

原子時計の原理と応用

近刊

F.G.マジョール 著　盛永篤郎 訳

周波数・時間測定の精度はレーザー冷却などの光技術で近年画期的に進展し，2005年度のノーベル物理学賞の研究テーマに深く関係している．
本書は，時間を測る時計について，原始的な方法から原子時計の最新の方法に至るまで時計の原理と技術，性能について解説している．原子時計の物理的原理について初学者が理解できるように，基礎となる力学，電磁気学，光学，相対論，量子力学，レーザー，原子物理学，物性物理学などが本書で説明されている．それゆえ，学部・修士課程の学生や技術者，非専門家にとって，原子・分子・光物理学の良い参考書にもなっている．一方，本書にはアイデアが生まれた歴史的・技術的背景について多くの記述があり，時計や技術の歴史書や啓蒙書としても興味深い．

▶ A5 495頁 本体5,500円 ISBN4-431-71206-2

生命のエンジン

美しき生命と機械エンジンの駆動力の源泉は何か

近刊

内藤 健 著

▶ 四六 約280頁 価格未定 ISBN4-431-71207-0

アドバンシング物理 A2

近刊

J.オグボーン／M.ホワイトハウス 編
笠 耐／西川恭治／覧具博義 監訳

▶ A4変 約250頁 価格未定 ISBN4-431-711167-8



ナノデバイスへの量子力学

D.K.フェリー 著
落合勇一／打波 守／松田和典／石橋幸治 訳

ナノスケール科学の出発点としての量子力学を詳述

新刊

固体電子工学の問題とナノデバイスで応用される量子力学の最新の話題．マイクロエレクトロニクス，量子井戸，量子伝導，超格子構造の研究成果から精選，メゾスコピックやナノデバイス工学の研究に好適．

▶ A5 439頁 本体4,700円 ISBN4-431-71204-6



ストリング理論 第2巻

新刊

J.ポルチンスキー 著
伊藤克司／小竹 悟／松尾 泰 訳

双対性,ブレーン,Calabi-Yauコンパクト化.最先端の研究へ

▶ A5 615頁 本体7,000円 ISBN4-431-71153-8

ストリング理論 第1巻

J.ポルチンスキー 著　伊藤克司／小竹 悟／松尾 泰 訳

▶ A5 463頁 本体5,500円 ISBN4-431-71152-X

超弦理論・ブレイン・M理論

シュプリンガー現代理論物理学シリーズ 第1巻
太田信義 著

▶ A5上製 325頁 本体4,200円 ISBN4-431-70970-3

超弦理論とM理論

M.カク 著　太田信義 訳

▶ B5 551頁 本体6,800円 ISBN4-431-70867-7

時空の幾何学 特殊および一般相対論の数学的基礎

J.J.キャラハン 著　樋口三郎 訳

▶ B5 353頁 本体3,800円 ISBN4-431-70914-2



アインシュタイン奇跡の年 1905

J.S.リグデン 著　並木雅俊 訳

▶ 四六上製 207頁 本体2,500円 ISBN4-431-71144-9

※価格は全て税別

シュプリンガー・フェアラーク東京株式会社 〒113-0033 東京都文京区本郷3-3-13 ▶ Tel: 03-3812-0757 ▶ Fax: 03-3812-0719 ▶ Email: orders@svt-ebs.co.jp

MATHEMATICAL SCIENCES
Number 517 July 2006

重力は語る

時空，弦，量子，宇宙との対話

表紙：戸川　隼人

July 2006 MATHEMATICAL SCIENCES Number 517

特集／重力は語る

逆二乗法則の魅力

序文にかえて

窪田 高弘

1. はじめに

「重力は語る」と題する特集号の冒頭の文章を書くことを依頼され，たいへん光栄に感じると同時に，少々肩の荷が重い気もしている．編集部の筆者に対するご希望は，ニュートンやアインシュタインの重力理論を総括し，現代の素粒子論，宇宙論，天文学の現状をまとめたこの特集の俯瞰図を描くことなのだろう．しかしそのような大任は，筆者のような浅学の輩には到底望むべくもない．そこでこの特集全体を概観するという（筆者にとって無謀な）試みはあっさりと放棄し，物理法則の中で最も有名な「万有引力の法則」の，あまり良く知られていない（あるいはほとんど忘れ去られてしまった）幾何学的側面について述べ，責をふさぐことにした．

2. 順問題と逆問題

万有引力の法則とは，質量が m と M の 2 つの質点が距離 r だけ離れているとき，2 つの質点の間には

$$\frac{GMm}{r^2}$$

という大きさの引力が働くというものである．ここで G は重力定数，あるいは万有引力定数と呼ばれる．通常の力学の教科書では，この万有引力の法則を仮定して，惑星に関するケプラーの 3 つの法則を解析的方法で導出するという筋書きのものが多い．ここでケプラーの 3 つの法則とは以下のものである．

ケプラーの第一法則： 惑星の軌道は，太陽の位置をその焦点とする楕円形である．

ケプラーの第二法則： 惑星の面積速度は一定である．

ケプラーの第三法則： 惑星の長半径の 3 乗は公転周期の 2 乗に比例する．

しかしニュートンが『プリンキピア』[1)]の中で実際に記述した筋書きは，通常の教科書とは逆の命題の証明であり，次の問題に答えるものであった．

> **問題 1：** ケプラーの 3 つの法則を仮定して，万有引力の法則を幾何学的に導出せよ．

ニュートンはライプニッツとともに微分積分学の創始者であるにも関わらず，解析的方法を採用せずに「幾何学的」に論じているのは興味深い．その興味深い内容をまず説明し，次にそれに触発されたファインマンの考察，ならびにファインマンの議論の発展を以下に述べる．問題 1 に対するニュー

トンの解答はかなり複雑である．そこでニュートンの複雑な議論は後回しにし，まずは円運動に関するホイヘンスの平易な議論から始めよう．

3. ホイヘンスの加速度公式

高等学校で学ぶ円運動の場合の加速度公式は，ホイヘンスが振り子時計を研究するうちに発見したという．筆者は「ホイヘンス全集」をいまだに手にしたことがないので，ホイヘンスがいかなる方法で円運動を調べたのか，実のところ正確には知らない (科学史家のご教示を乞う)．しかし二次的な資料をもとにして推量するならば，おおむね次のようなものであったと想像される．図 1 の点線で表した半径 r の円軌道を，質点が等速 v で運動しているとする．このとき質点の加速度を r と v を用いて表せ，というのが課題である．

質点が点 P の位置を左周りに運動しているとしよう．もし質点に力が働いていないならば，質点は等速直線運動し，微小時間 $\varDelta t$ ののちには $v\varDelta t$ だけ離れた点 Q の位置に到達するだろう．しかし実際には中心に向かう引力が働いて点 R の位置に "落下" する．落下の距離 $\overline{\mathrm{QR}}$ は，落下の法則により

$$\overline{\mathrm{QR}} = \frac{1}{2} \times \text{加速度} \times (\varDelta t)^2 \qquad (1)$$

となる．

一方 $\triangle$ORT にピタゴラスの定理を適用すると

$$r^2 = \overline{\mathrm{OT}}^2 + \overline{\mathrm{RT}}^2 = (r - \overline{\mathrm{QR}})^2 + (v\varDelta t)^2$$

となる．この式を $\overline{\mathrm{QR}}$ について解くと

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{QR}} &= r - \sqrt{r^2 - (v\varDelta t)^2}\\ &= \frac{(v\varDelta t)^2}{r + \sqrt{r^2 - (v\varDelta t)^2}}\\ &\approx \frac{(v\varDelta t)^2}{2r} \qquad (2)\end{aligned}$$

という公式を得る．ここで $\varDelta t$ は十分に微小な時間であるとした．(1) と (2) とを等しいとすると

$$\text{加速度} = \frac{v^2}{r}$$

という公式に到達する．これがホイヘンスが得た公式である．このやり方は三角関数などを必要としていないので，中学生でも理解できる．

4. 楕円の性質（その 1）

前節の円軌道の議論を楕円軌道の場合に拡張し，質点が楕円軌道上を運動しているときの加速度の公式を求めよう．ケプラーの 3 つの法則はすべて仮定する．すなわち問題 1 がテーマである．この場合等速運動ではないので，面積速度という不変量を用いた加速度公式を志向するほうが賢明であろう．

ニュートンはこの問題を解くにあたって次の楕円の性質に着目した．図 2 は点 F, F′ を焦点とする楕円であり，点 P は楕円上の点である．点 P で接線を引き，点 Q を接線の上の任意の点であるとする．点 Q を通り，FP に平行な直線が楕円と交わる点を R とする．R から直線 FP に下ろした垂

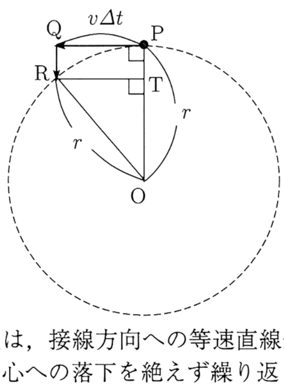


図 1　質点は，接線方向への等速直線運動と，引力中心への落下を絶えず繰り返している．

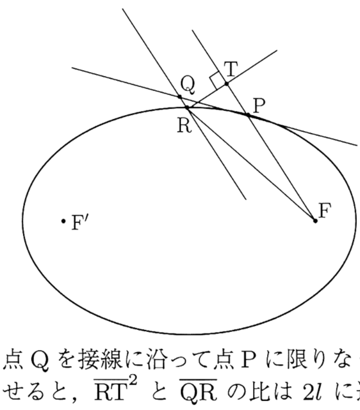


図 2　点 Q を接線に沿って点 P に限りなく接近させると，$\overline{\mathrm{RT}}^2$ と $\overline{\mathrm{QR}}$ の比は $2l$ に近づく．

線の足をTとする．鍵となるのは次の定理である．

定理1：次の関係式が成り立つ．

$$\lim_{Q\to P}\frac{\overline{RT}^2}{\overline{QR}} = 2l.$$

ここで $2l$ は通径と呼ばれる量であり，l は，楕円を極座標 (r,ϕ) を用いて表した式

$$r = \frac{l}{1+e\cos\phi} \qquad (3)$$

に現れる l と同じである．(3) 式の中の e は離心率と呼ばれる．ニュートンは，問題1を解くにあたってこの定理を幾何学的に証明し活用した．この定理のニュートン流の証明[1)]を理解するには，かなりの忍耐力を必要とする[2)]．多忙極まりない現代の学生ならば，座標軸を引いて解析的に，比較的容易に証明することだろう．そのような証明ならば文献3) の付録に与えてあるので，ご参照願いたい．

5. ニュートンの論法

定理1を認めたうえで，ニュートンが問題1をどのようにして解いたか説明しよう．図2の楕円を惑星の軌道とし，太陽は点Fに位置しているとする．惑星が図2の点Pの位置を通過した瞬間を考えよう．惑星は，もし太陽からの引力を受けていないならば，微小時間 Δt ののち，楕円の接線の方向に飛び出して点Qに到達することだろう．ところが実際には太陽の引力を受けて太陽方向（Q→Rの方向）に“落下”する．落下の距離は，落下の法則により

$$\overline{QR} = \frac{1}{2}g(r)(\Delta t)^2 \qquad (4)$$

で与えられる．ここで $r = \overline{FP}$ であり，$g(r)$ は点P付近での重力加速度である．

次に面積速度一定の法則を考えよう．惑星が掃いた面積は，Δt が微小時間の場合は △FPR の面積で近似してよく，

$$\triangle FPR = \frac{1}{2}\times\overline{FP}\times\overline{RT} = \frac{1}{2}r\times\overline{RT} \qquad (5)$$

で与えられる．面積速度の2倍を h とすればこの三角形の面積は $\triangle FPR = (h/2)\Delta t$ となる．このことと (5) から

$$\overline{RT} = \frac{h\Delta t}{r} \qquad (6)$$

を得る．

そこで楕円に関する定理1に (4) と (6) を代入すると

$$\begin{aligned}2l &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overline{RT}^2}{\overline{QR}}\\ &= \lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{h\Delta t}{r}\right)^2\left(\frac{2}{g(r)(\Delta t)^2}\right)\\ &= \frac{2h^2}{r^2\,g(r)}\end{aligned}$$

という結果が得られる．すなわち点Pにおける重力加速度 $g(r)$ は

$$g(r) = \frac{(h^2/l)}{r^2} \qquad (7)$$

であると結論される．太陽の質量を M とし，$h^2/l = GM$ と置けば，(7) は万有引力の法則そのものである．

注意深い読者は，h も l も惑星ごとに異なる値をとるのに，h^2/l を惑星によらない普遍的な量 GM と置くことが果たして合理化できるのか，と疑問を持つかもしれない．ところがここで，ケプラーの第三法則を持ち込む．h^2/l が惑星に依存しない量であることは，実はケプラーの第三法則によって保証されている．惑星運動の周期を T，惑星の楕円軌道の長軸の長さを $2a$ と置くと，$T^2a^{-3} = 4\pi^2 l/h^2$ となるからだ．このように問題1の解答を完結させるためには，ケプラーの法則3つすべてが必要不可欠となる．春秋の筆法で言うならば，ケプラーの3つの法則は，ニュートンが万有引力の法則を発見するべく，ケプラーが周到に準備しておいてくれたお膳立てであった．

6. 楕円の性質（その2）

ニュートンの幾何学的な考察が，アメリカの物

理学者ファインマンを強く刺激したであろうことは十分に想像できる．なぜならファインマンは，図形を描いて直感的に物理を理解することに，強い情熱を持っていたからだ．

ファインマンは楕円に関する次の性質に着目した．図 3 の実線は，F と F′ を焦点とする楕円である．楕円上の任意の点 P で接線 LL′ を引く．焦点 F′ を通り，LL′ に垂直に交わる直線を引き，FP の延長線との交点を G とする．

このとき次の定理が成り立つ．

定理 2：点 P が楕円の上を一周するとき，点 G は半径 $2a$ の円弧を描く．

ここで $2a$ は楕円の長軸の長さである．定理 2 の証明は容易であるから，読者に任せることにしよう．

ところで楕円の離心率を e とすると，$\overline{\mathrm{FF'}} = 2ae$ となる．したがって

$$\text{円の半径} : \overline{\mathrm{FF'}} = 2a : 2ae = 1 : e \qquad (8)$$

という比率関係が出てくる．これはあとで重要な意味を持ってくる．

7. ファインマンの洞察

図 3 の焦点 F に太陽が位置しているとし，点 P を惑星のある時刻での位置としよう．ファインマン[4)]が図 3 に関連して自らに課した問題は次のものである．

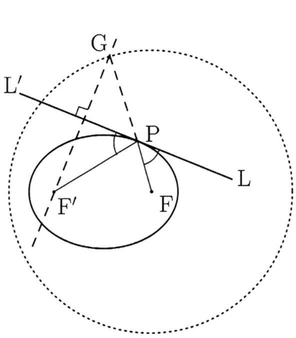


図 3　点 P が楕円上を一周するとき，点 G は半径 $2a$ の円弧を描く．

問題 2：図 3 の楕円上を惑星が運動しているとする．外側の点線の円弧に物理的な意味を賦与せよ．

この問題を考えるにあたって，惑星が楕円運動している際の，各場所での速度ベクトルに注目してみよう．各場所での速度ベクトルを図示すれば図 4 のようになる．太陽に近いと速度は速く，太陽から遠ければ速度は遅い．図 4 の各速度ベクトルの始点を，一点に集めて描いたのが図 5 (A) である．

さてここで図 5 (A) の速度ベクトルの先端が描く図形が何になるかを考えよう．楕円を極座標，(3) で表したとする．惑星の速度は，r が増大する方向の成分が

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dt} &= \sqrt{\frac{2E}{m} + \frac{2GM}{r} - \frac{h^2}{r^2}} \\ &= \sqrt{GM}\sqrt{\frac{e^2-1}{l} + \frac{2}{r} - \frac{l}{r^2}} \\ &= \frac{eh}{l}\sin\phi\end{aligned}$$

となる．ここで惑星のエネルギー E，惑星の質量 m，離心率 e の間に $e^2 - 1 = 2lE/GMm$ という関係があること，および $h^2/l = GM$ と (3) を用いた．一方 ϕ が増大する方向の速度成分は

$$r\frac{d\phi}{dt} = \frac{h}{r} = \frac{h}{l}(1 + e\cos\phi)$$

となる．以上の結果により図 5 (A) の速度ベクトルの直交座標系での成分 v_x, v_y は次のように求まる．

$$v_x = \frac{dr}{dt}\cos\phi - r\frac{d\phi}{dt}\sin\phi = -\frac{h}{l}\sin\phi,$$

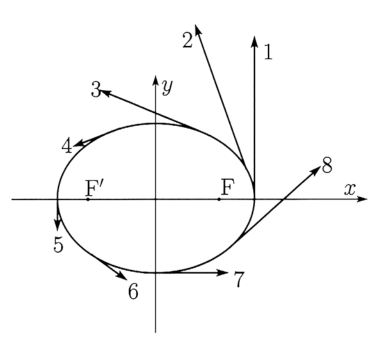


図 4　楕円軌道上を運動する惑星の，各点における速度ベクトルの様子．

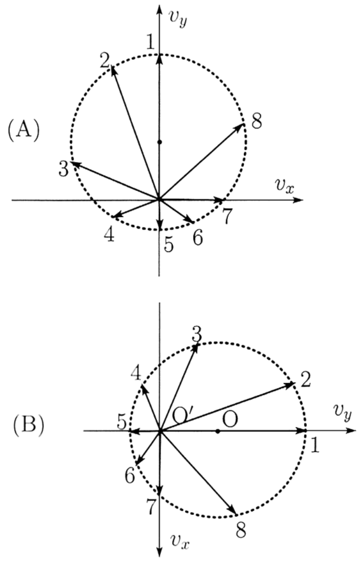


図 5　(A) 図 4 の惑星の速度ベクトルを一点に集めて描いた図（ホドグラフ）．(B) (A) の図を 90 度右に回転させた図．

$$v_y = \frac{dr}{dt}\sin\phi + r\frac{d\phi}{dt}\cos\phi = \frac{eh}{l} + \frac{h}{l}\cos\phi.$$

このことから，図 5 (A) の速度ベクトルの先端の描く図形は

$$(v_x)^2 + \left(v_y - \frac{eh}{l}\right)^2 = \left(\frac{h}{l}\right)^2 \qquad (9)$$

という円であることがわかる．

ここで (9) により，図 5 (A) の円の半径 h/l と，原点と円の中心との距離 eh/l の比が

$$\frac{h}{l} : \frac{eh}{l} = 1 : e$$

であるという事実に注目しよう．この比率は (8) と一致している．そこでファインマン[4)]に従って図 5 (A) を 90 度右回りに回転させ，図 3 と重ねることにしよう．図 5 (B) が 90 度回転した図である．図 5 (B) を図 3 に重ねるといっても，次元の異なる量の図であるから，適当に尺度を変えなければならない．図 5 (B) で $\overline{\mathrm{OO'}} = eh/l$，図 3 では $\overline{\mathrm{FF'}} = 2ae$ であることから，図 5 (B) を

$$2ae \times \frac{1}{(eh/l)} = 2ah\left(\frac{l}{h^2}\right) = \frac{2ah}{GM} \quad (10)$$

だけ拡大あるいは縮小し，図 5 (B) の点 O, O′ を，図 3 の F, F′ にそれぞれ重ねることにしよう．そうすると図 5 (B) の円と図 3 の円はピッタリ重なる．

以上の考察から次のことが主張できる．

定理 3： 図 3 の点 P 付近を惑星が通過するとき，そこでの惑星の速度の大きさは $\overline{\mathrm{F'G}}$ に比例する．

これが問題 2 に対する解答である．

8. ラプラス・ルンゲ・レンツのベクトル

ここでファインマンの考察を離れて，少し違った角度から図 3 を眺めてみよう．少し時間をかけて考えてみると，図 3 は，実はラプラス・ルンゲ・レンツのベクトル[5)]と密接な関係にあることに気付く．このベクトルは，ケプラー運動特有の保存ベクトルとして古来知られているものである．筆者が想像するに，ファインマンは本当は次の問題を解こうとしているうちに，図 3 に逢着したのではなかろうか？

問題 3： ラプラス・ルンゲ・レンツのベクトルが保存量であることを，幾何学的に説明せよ．

この問題の意味と解答を同時に説明しよう．ラプラス・ルンゲ・レンツのベクトル $\boldsymbol{e}$ は次の式で定義される．

$$\boldsymbol{e} \equiv \frac{1}{GM}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{h}) - \frac{\boldsymbol{r}}{r}, \quad \boldsymbol{h} \equiv \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}. \quad (11)$$

ここで $\overrightarrow{\mathrm{FP}} = \boldsymbol{r}$ であり，$\boldsymbol{v}$ は図 3 の P の位置での惑星の速度ベクトルである．運動量ベクトル $\boldsymbol{p}$，角運動量ベクトル $\boldsymbol{L}$ を用いて，(11) を次のように書いてもよい．

$$GMm\boldsymbol{e} = \frac{1}{m}(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{L}) - \frac{GMm}{r}\boldsymbol{r}. \quad (12)$$

ケプラー問題では，ベクトル $\boldsymbol{e}$ は時間によらない保存ベクトルである．このことを図形を用いずに解析的に証明するのは容易である．例えば文献 3, 6) を参照していただきたい．

図 3 と (11) の $\boldsymbol{e}$ の間に潜む図形的関係を述べ

よう．図 3 の円の半径が $2a$ であることから

$$\overline{\mathrm{FG}} = 2a\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

であることにまず注意する．次に (10) の拡大率により，

$$\overline{\mathrm{F'G}} = \frac{2ah}{GM}|\boldsymbol{v}| = \frac{2a}{GM}|\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{h}|$$

という関係を得る．ここで $h=|\boldsymbol{h}|$ であり，$\boldsymbol{h}$ と $\boldsymbol{v}$ が直交しているために $|\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{h}|=|\boldsymbol{v}|h$ であることを用いている．一方，図 3 において，ベクトル $\boldsymbol{h}$ は紙面に垂直上向きであり，$\boldsymbol{v}$ は図の接線 $\mathrm{LL'}$ の方向であることから，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{F'G}}$ と $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{h}$ は平行であることも了解できる．よって

$$\overrightarrow{\mathrm{F'G}} = \frac{2a}{GM}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{h}$$

を得る．以上の知識を総動員すると，図 3 の 2 つの焦点を結ぶベクトルは，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{F'F}} &= \overrightarrow{\mathrm{F'G}} - \overrightarrow{\mathrm{FG}}\\ &= 2a\left\{\frac{1}{GM}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{h}) - \frac{\boldsymbol{r}}{r}\right\}\\ &= 2a\,\boldsymbol{e} \qquad (13)\end{aligned}$$

という形で $\boldsymbol{e}$ と結びつく．点 P が楕円上を移動すれば $\overrightarrow{\mathrm{F'G}}$ も $\overrightarrow{\mathrm{FG}}$ も変化するが，$\overrightarrow{\mathrm{F'F}}$ は勿論変化せず，$\boldsymbol{e}$ が保存ベクトルであることは自明となる．以上が問題 3 に対する解答である．

9. 量子力学的ケプラー問題

量子力学に話題を転じよう．ベクトル $\boldsymbol{e}$ が古典力学のケプラー問題で保存量であるならば，量子力学的ケプラー問題でも対応する保存量があるはずだ．量子力学的ケプラー問題とは水素原子の問題，すなわち

$$H = \frac{1}{2m}\boldsymbol{p}^2 - \frac{k}{r} \qquad (14)$$

というハミルトニアンの固有値問題にほかならない．ここで k は電子の電荷の 2 乗であり，万有引力の場合の GMm に相当している．量子力学では，(12) の右辺を対称化して

$$\boldsymbol{M} = \frac{1}{2m}(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{L} - \boldsymbol{L}\times\boldsymbol{p}) - \frac{k}{r}\boldsymbol{r} \qquad (15)$$

と書く．量子力学では座標と運動量は交換せず $[p_i, r_j] = -i\hbar\delta_{ij}$ という交換関係に従うので，対称化の操作を忘れてはならない．

量子力学的ケプラー問題では，ハミルトニアン (14)，角運動量ベクトル $\boldsymbol{L}$，そして (15) の $\boldsymbol{M}$ が次のような代数関係を満足している．

$$[H, L_i] = 0, \quad [H, M_i] = 0, \qquad (16)$$

$$[L_i, L_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}L_k, \qquad (17)$$

$$[L_i, M_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}M_k, \qquad (18)$$

$$[M_i, M_j] = -i\hbar\epsilon_{ijk}L_k\frac{2H}{m}, \qquad (19)$$

$$\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{L} = 0, \qquad (20)$$

$$(\boldsymbol{M}^2 - k^2) = \frac{2}{m}H(\boldsymbol{L}^2 + \hbar^2). \qquad (21)$$

(16) は $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{M}$ が保存ベクトルであることを意味している．$\boldsymbol{L}$ と $\boldsymbol{M}$ を用いて

$$\boldsymbol{J}^{\pm} \equiv \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{L} \pm \sqrt{-\frac{m}{2H}}\boldsymbol{M}\right)$$

というベクトルを定義すれば，(17)–(19) の交換関係は，より美しい形，

$$\left[J_i^+, J_j^+\right] = i\hbar\epsilon_{ijk}J_k^+,$$

$$\left[J_i^-, J_j^-\right] = i\hbar\epsilon_{ijk}J_k^-,$$

$$\left[J_i^+, J_j^-\right] = 0$$

となる．これは $SU(2)\otimes SU(2)$ あるいは $O(4)$ と呼ばれる代数構造である．パウリ[7]は，ハイゼンベルクたちが 1925 年に量子力学の定式化を初めて打ち出したとき，この代数構造を駆使して，間髪をいれることなく水素原子のエネルギー準位を求めた[8]．

しかしここで次の問題が頭に浮かぶ．

問題 4：量子力学的ケプラー運動が持つ $SU(2)\otimes SU(2)$ あるいは $O(4)$ という代数構造に幾何学的な解釈を与えよ．

$O(4)$ というのは 4 次元空間の回転群のことである．ここでいう 4 次元回転とは一体どういう 4 次元空間のことなのだろうか．通常の 3 次元空間の

回転を含むであろうことは確実であるが，その4次元版とは何を意味するのか．

10. $O(4)$ 対称性が自明となる定式化

$O(4)$ 対称性の幾何学的な解析方法は，パウリの論文以後10年くらいたってから，フォック[9]やバーグマン[10]によって論じられた．空間回転の生成子は通常，1階の微分演算子で表すことが多い．量子力学の場合，角運動量ベクトル $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$ が通常の3次元回転の生成子で，$\boldsymbol{p}=-i\hbar\partial/\partial\boldsymbol{r}$ と表すことが多い．ところが (15) の中には $\boldsymbol{p}$ が2重に現れるので，通常の3次元空間では，$\boldsymbol{M}$ は2階の微分演算子になってしまう．そこで通常の $\boldsymbol{r}$ の空間ではなくて運動量 $\boldsymbol{p}$ の空間に移って回転を考え直すほうが賢い．ケプラー問題のシュレーディンガー方程式

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2-\frac{k}{r}\right)\psi(\boldsymbol{r}) = E\psi(\boldsymbol{r})$$

を運動量空間で書くならば，

$$\left(\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}-E\right)\Phi(\boldsymbol{p}) = \frac{k}{2\pi^2\hbar}\int d^3\boldsymbol{q}\frac{\Phi(\boldsymbol{q})}{|\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p}|^2} \tag{22}$$

という積分方程式となる．ここで $\Phi(\boldsymbol{p})$ は，波動関数 $\psi(\boldsymbol{r})$ をフーリエ変換したものである．

さてこのシュレーディンガー方程式の $O(4)$ 対称性を明瞭化するために，立体射影という考え方を導入する．すなわち，4次元ユークリッド空間中のベクトル u^μ $(\mu=0,1,2,3)$ を

$$u^\mu \equiv \frac{\boldsymbol{p}^2-R^2}{\boldsymbol{p}^2+R^2}n^\mu+\frac{2R}{\boldsymbol{p}^2+R^2}\begin{pmatrix}0\\ \boldsymbol{p}\end{pmatrix}$$

という式で定義する（図6参照）．ここで

$$R^2 \equiv -2mE > 0$$

であり，$n^\mu=(1,0,0,0)^t$ は北極方向の単位ベクトルである．u^μ の定義から明らかなように，u^μ は4次元空間中の半径1の球面上に位置している $(|u|^2\equiv\sum_{\mu=0}^{3}u^\mu u^\mu=1)$．これにより $\boldsymbol{p}$ という3次元ベクトルと4次元空間中の単位球上の点が，

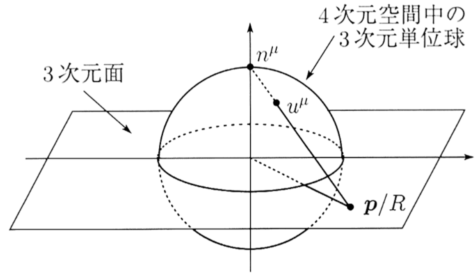


図6　4次元ユークリッド空間における立体射影．

（北極点を除けば）一対一に対応する．この単位球は，4次元空間の回転に対して明らかにその形が不変であるから，$\boldsymbol{p}$ よりも u^μ を用いれば対称性がわかり易くなるだろう．

$\boldsymbol{p}$ の積分を3次元単位球面の上での積分に書き換える公式は

$$\begin{aligned}d^4\Omega_u &\equiv 2\delta(|u|^2-1)d^4u\\ &= \frac{(2R)^3}{(\boldsymbol{p}^2+R^2)^3}d^3\boldsymbol{p}\end{aligned}$$

であり，(22) 右辺の被積分関数中の分母は

$$|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}|^2 = \frac{(\boldsymbol{p}^2+R^2)(\boldsymbol{q}^2+R^2)}{(2R)^2}|u-v|^2$$

によって書き換えられる．ここで v は $\boldsymbol{q}$ に対応している．(22) の波動関数を

$$\phi(u) = \frac{1}{\sqrt{R}}\left(\frac{\boldsymbol{p}^2+R^2}{2R}\right)^2\Phi(\boldsymbol{p})$$

に置き換えて (22) の積分方程式を書き直すと

$$\phi(u) = \frac{mk}{2\pi^2\hbar R}\int d^4\Omega_v\frac{\phi(v)}{|u-v|^2}$$

という方程式に到達する．この方程式の著しい特徴は，方程式の $O(4)$ 不変性が自明である点にある．実際，u-空間の4次元的回転に対して $d\Omega_v$ も $|u-v|$ も不変である．4次元回転のうち $(\mu,\nu)=(2,3),(3,1),(1,2)$ という回転に対する不変性が角運動量ベクトル $\boldsymbol{L}$ の保存に，$(\mu,\nu)=(0,1),(0,2),(0,3)$ という回転に対する不変性がベクトル $\boldsymbol{M}$ の保存に対応する．

駄目押しとして，$(\mu,\nu)=(0,1),(0,2),(0,3)$ という回転に対する生成子を実際に作ってみて，それが (15) の $\boldsymbol{M}$ において，$\boldsymbol{r}=i\hbar\partial/\partial\boldsymbol{p}$ という

置き換えをしたものであることを確認しておこう．例えば $(\mu,\nu)=(0,3)$ という回転の下では $\boldsymbol{p}$ は

$$\begin{aligned}\delta p^3 &= \varepsilon\frac{\boldsymbol{p}^2-R^2-2(p^3)^2}{2R},\\ \delta p^2 &= -\varepsilon\frac{p^3p^2}{R},\\ \delta p^1 &= -\varepsilon\frac{p^3p^1}{R}\end{aligned}$$

という変換を受ける．ここで ε は回転のパラメータである．波動関数は

$$\delta\Phi(\boldsymbol{p}) = \frac{1}{(\boldsymbol{p}^2+R^2)^2} \times\sum_{i=1}^{3}\delta p^i\frac{\partial}{\partial p^i}\left\{(\boldsymbol{p}^2+R^2)^2\Phi(\boldsymbol{p})\right\}$$

という変換を受けるが，この式を

$$\delta\Phi(\boldsymbol{p}) = -\frac{im}{\hbar R}\varepsilon M_{03}\Phi(\boldsymbol{p})$$

と書くと，$i\hbar\partial/\partial\boldsymbol{p}=\boldsymbol{r}$ と置いて

$$\begin{aligned}M_{03} &= \frac{1}{(\boldsymbol{p}^2+R^2)^2}\left[\frac{\boldsymbol{p}^2-R^2}{2m}x^3 - \frac{p^3}{m}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})\right](\boldsymbol{p}^2+R^2)^2\\ &= \frac{\boldsymbol{p}^2-R^2}{2m}x^3-\frac{p^3}{m}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})-\frac{2i\hbar}{m}p^3\end{aligned}$$

という形を得る．$(0,1),(0,2)$ という回転に対しても同様な計算を行い，M_{01}, M_{02} という量を得る．更にここで $-R^2/2m=\boldsymbol{p}^2/2m-k/r$ と置けば，$\boldsymbol{M}=(M_{01},M_{02},M_{03})$ は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M} &= \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r}\left(\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}-\frac{k}{r}\right)\\ &\quad -\frac{\boldsymbol{p}}{m}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})-\frac{2i\hbar}{m}\boldsymbol{p}\end{aligned}$$

となるが，これは (15) の $\boldsymbol{M}$ と同一であることは容易に確認できる．

11. 残る問題

量子力学的ケプラー問題の数学的，群論的研究についてはその後も幾人かの人々[11,12]によってなされ，$O(4)$ 対称性についての理解は相当に深まっている．量子力学的ケプラー問題では，放物線座標が有効であるが，その点に関してもある程度の説明を与え得る[10]．

しかし筆者にとってまだすっきりしないのは，古典力学の場合と量子力学の場合とで，不変量に対する幾何学的な理解の仕方がかなり違って見えることである．言い換えれば次の問題が懸案として残る．

> **問題 5：** 図 3 と図 6 の間に何か深い関係があるのか．

筆者はこの問題に対して明快な答えを持っておらず，この稿もいささか画龍点睛を欠く感がある．もしかしたら問題 5 には答えがないのかもしれない．あるいは問題の設定の仕方が誤りなのかもしれない．読者の皆さんにも是非ご一考，ご教示をお願いしたい．

この原稿を通読し有益な助言をお寄せ下さった佐々木隆氏に感謝する．

参考文献

1) 『プリンキピア』(河辺六男編集，中央公論社) 命題 11.
2) S. Chandrasekhar 著『チャンドラセカールの「プリンキピア」講義』(中村誠太郎監訳，講談社) および山本義隆著『古典力学の形成』(日本評論社) は大いに参考になる．
3) 窪田高弘著『力学』(培風館より近刊).
4) D.L. Goodstein and J.R. Goodstein 著『ファインマンさん，力学を語る』(砂川重信訳，岩波書店).
5) ハミルトンは，(11) の $\boldsymbol{e}$ のことを離心率ベクトルと名付けた．山本義隆氏の著書[2]によると，ラプラス・ルンゲ・レンツのベクトルは，ラプラスの『天体力学』以前にもヘルマンやヨハン・ベルヌーイによって取り上げられていたという．しかし本稿では混乱を避けるために，通常用いられている名称を用いることにした．
6) 植松恒夫著『力学』(学術図書出版社).
7) W. Pauli, *Zeitschrift für Physik* **36** (1926) 336.
8) 島和久氏の解説 (「数理科学」1969 年 12 月号) も参照して頂きたい．
9) V. Fock, *Zeitschrift für Physik* **98** (1935) 145.
10) V. Bargmann, *Zeitschrift für Physik* **99** (1936) 576.
11) J. Schwinger, *J. Math. Phys.* **5** (1964) 160.
12) M. Bander and C. Itzykson, *Rev. Mod. Phys.* **38** (1966) 330.

(くぼた・たかひろ，大阪大学大学院理学研究科)

一般相対性理論への長い道のり

横山　順一

1. 空間・時間・物質

昨2005年は国際物理年であった．これはアインシュタインが光量子仮説による光電効果の説明，ブラウン運動の理論，そして特殊相対性理論という物理学史上に燦然と輝く３つの理論を提唱し，奇跡の一年と呼ばれた1905年からちょうど100周年に当たることを記念したものであった．アインシュタインの重力理論である一般相対性理論はこの奇跡の年のちょうど10年後の1915年に完成した理論である．そしてこれは，時間と空間に関するわれわれの認識に大きな変革を求める，画期的なものであった．現在わが国においては極めて多数の研究者が一般相対性理論を巡る様々なテーマに取り組み，その研究は隆盛を窮めているのはまことに結構なことである．しかしこれは裏を返せば，もうこれ以上新規参入の余地がないと言ってもよいほどである，ということでもあり，これからアインシュタインを目指す若い学徒にとっては気の毒な話であるとも言える．ともかく，大勢で取り組むことにより研究テーマは細分化し，研究の進展とともに，悲しいかなともすると技術的な側面ばかりに目がいき，時間と空間の認識というような根源的なテーマは等閑にされがちになってしまうのは，やはりやむを得ないことであろう．

そこで時間をぐんとさかのぼってみることにするが，1917年にチューリッヒで行われた講義を元にして翌年出版された，一般相対性理論の草創期の教科書であるヘルマン・ワイルの著作には『空間・時間・物質』（“*Raum Zeit Materie*”）という根源的な題名が付けられていた．一般相対性理論の魅力は，やはり物理学の根幹であるこの３つの基本要素を，私たちの日常生活とはまったく異なったレベルで結びつけている点にあると言えよう．

ところで，この本にはかつて２種類の邦訳が出版されていた．大阪大学の内山龍雄博士による講談社版，そして菅原正夫博士による東海大学出版会版である．私が学部学生であった頃はどちらも書店で容易に手に入ったのであるが，現在は残念ながらいずれも品切れである．このような書物に２種類も訳本が出るというのは現在では考えられないことであるが，菅原版は原著に極めて忠実に翻訳され，内山版はなるべくわかりやすくなるよう，言い回しを変えたり，訳注を多数つけたり，とそれぞれに特徴があった．

私は，よりわかりやすいはずの内山版のほうを教養課程の頃に読もうとしたのだが，それでもよくわからなかったものである．かつて俗に，「アインシュタインの相対性理論をきちんと理解しているのは世界に３人しかいない.」などと言われていた（しかしその３人が誰なのか，明示したものはなかった）ことを，妙に納得したりしたものである．内山先生訳者序文に曰く，「近頃，何事によらずeasyに事をはこぶことが大流行である．食品の調理，カメラをはじめ，学問の世界にも“インスタント化”がはいりこみつつある．このような流行に反抗して，この難解な書をジックりと苦労しながら読破するのは一大痛快事といえよう.」と．1972年10月のことである．（カップヌードルが発売されたのは1971年９月18日のことであった.）私は結局，この本を読んで一般相対性理論を会得するのは諦めざるを得なかったが，それでも本書を繙くことで，格調の高い学問に触れられた気がして，それは嬉しかったものである．インスタント化ならぬインターネット化の入りこんだ現在の学問の世界を目の当たりにしたら，内山先生はなんと仰ったであろうか．

現在では日本語の書物だけを見ても，当時とは比較

にならないほど多数の教科書が出版されており，わかりやすい優れたものも少なくない．ワイル先生の講義を聴いたチューリッヒ高等工業学校の聴衆が，どのように受け止めたかは興味の持たれるところであり，その意味ではわかりやすい教科書が増え，一般相対性理論の敷居が低くなったのは好ましいことであろう．しかしながら，書肆に並んだ書物の知的水準がこの四半世紀でずいぶん下がってしまったというのも，その反面否定できない事実ではなかろうか．学術出版社とはいえ商売なのだから，仕方がないのであるが，それを埋めるような仕組みも，今や必要性が増していると言えよう．

2. 絶対空間・絶対時間

一般相対性理論による時空概念の変革に進む前に，ニュートン力学における時空概念をおさらいしておこう．現在の高度文明社会において，私たちは多くのブラックボックスに囲まれて暮らしている．こうしたブラックボックスには，実は特殊相対性理論はもちろんのこと，一般相対性理論をすら活用した装置が数多く隠されているのだが，悲しいかな，それに気づくことはまずないと言ってよい．科学離れの原因はそんなところにもあるのかもしれないが，ともかく日常生活はニュートン力学で事足りているように見える．

ニュートンは，彼の力学の集大成である『自然哲学の数学的諸原理』において理論を展開するに当たって，まず力や運動量などいくつかの定義を述べたあと，注として，時間・空間・場所・運動に関する見解を述べている．これらについては，「万人周知のものとして，その定義を与えることはしない．」という一方，「普通一般の人々はこれらを感覚に関係した量に他ならないと理解しており，そのためにある種の先入観が生じている．これを取り除くためには，それらを絶対的なものと相対的なもの，真なるものと見かけ上のもの，数学的なものと通常のものとに区別するのがよい．」として，「通常のもの」でないほうを，絶対時間と絶対空間として，それらの定義を以下のように述べている．

「絶対的な，真の，そして数学的な時間は，おのずから，またその本性から，他のなにものにも関わりなく，一様に流れるもので，別の名を持続という．」

「絶対的な空間は，その本性において，いかなる外的事物にも無関係に，常に同形，不動のものとして存続する．」

私たちは意識の主体として自分自身を認識する．意識の主体があるということは，同時に意識される対象が存在するということである．この意識される対象こそが最も広い意味においての自然である．そして私たちは，自然のあらゆる現象は，ある時間の経過の中に，ある空間の広がりにおいて現れるものとして認識する．すべての人間が意識するこうした対象としての自然を素朴に同一なものと仮定してしまうと，自然の実在性や，時間と空間の絶対性はその当然な帰結としてあった．そこには動かすことのできない空間の枠の中にあらゆる自然が画然と閉じこめられており，その中に置かれた人間自身は，一様に流れゆく時間の窓を通して自分の外を眺めているのである．

絶対時間と絶対空間の中に繰り広げられる（と多くの人が錯覚した）ニュートンの力学があまりにも大きな成功を収めたため，これらに関して疑問を呈したものは少なかった．しかし，これらの概念は事実のみを研究する，というニュートンの方針に実は忠実なものではなかった．これを厳しく再検討したのがマッハであった．

私たちは，ものの変化を直接，時間に即して測ることはできない．むしろ逆に，時間は，ものが変化するということから私たちが引き出した抽象なのである．ある運動は別のある運動に関して一様であるということはできるが，ある運動がそれ自身一様であるかどうかを問うことはできない．したがって，どんな変化にも無関係な，「絶対時間」について，私たちは云々することはできないのである．これはどんな運動を用いても測定できず，実用上の価値も科学上の価値もないのである，と．

絶対空間，ならびにそれに対する運動である絶対運動については，ニュートンは次のような実験によって実証可能であると主張した．すなわち，円筒形の水桶を長い紐でつるし，何度も回転させて紐をよじらせる．それを手で止めた状態でそこに水を入れ，手を離す．すると水桶は回り出すが，水はすぐには変化しないので水面は平らなままである．水桶の内壁の表面と水の相対運動はこのときが最大である．しばらく立つと水桶の運動が水にも伝わり，水も回り出す．水はついには水桶と同じように回るようになり，そのとき水桶の内壁と水は相対的に静止した状態になる．しかしこの

とき水面は平らではなく，中央が凹んだ形になる．これによって，絶対空間に対する絶対運動と水桶と水の間に起こるような相対運動を区別できると主張したのである．

しかしマッハは，あらゆる質量，あらゆる速度，あらゆる力は相対的なものなのであり，相対的なものと絶対的なものを区別する必要はなく，その判定を迫られることもなく，もしニュートンを信じたいのであれば，水桶が静止し，恒星天がその周りを回転している場合に遠心力が存在しないことを証明すべきだと主張した．すなわち，彼はニュートンの水桶の実験は，「水桶の壁に対する水の相対回転は目に見えるほどの遠心力を引き起こさないが，地球や恒星天に対する相対回転は目に見える遠心力を引き起こす．」ということを教えているにすぎないのだ，と述べた．そして，「水桶の壁をどんどん厚くして質量を大きくしていき，ついには数キロメートルの厚さにしたときどうなるか，誰も何も言えない」と．

このような運動の相対性に基づき，物体の慣性（慣性質量）は宇宙の全質量との相互作用によって規定される，とマッハは主張した．これをマッハの原理と言う．

アインシュタインはこのようなマッハの考え方に少なからぬ影響を受けている．マッハが 1916 年の初めに逝去したとき，アインシュタインは次のような追悼の辞を述べている．「マッハは古典力学の弱点を明らかに知っていたので，この点において一般相対性理論にはなはだ接近していた．そしてこれは今からほとんど半世紀以前のことであったのである．もし彼の若い心が活動していた時代に光速度不変の意義に関する疑問が既に物理学者を動かしていたならば，彼がもうその時分に今日の相対論に到達していただろうということは必ずしも憶測には止まるまい．ニュートンの水桶の実験に対する考察は一般相対性（加速度の相対性）の必要がいかに切に彼の思想に横たわっていたかを示すものである」と．

3. アインシュタインの時間と空間

以上のような観点から，絶対時間という概念を捨て去ることは，実はニュートン力学にとっては大きな挑戦を引き起こす．われわれは古来，ニュートンの運動方程式に現れる絶対時間を，擬似的慣性系における主観的時間であるところの日常的時間と同一視して，これを身の回りの諸現象に適用し，一定の成功を収めてきた．このことは実はわれわれに二重の幸福をもたらしてきた．一つは，われわれの暮らす擬似的慣性系における日常的時間の持つ未定義性を，それは理想化された絶対時間を近似しているものなのだ，と自ら納得させることによって自己満足を得られたこと．もう一つは，より重要なことだが，マッハの言うように，絶対時間というものをわれわれは測定することはできないために，その不可知な量である絶対時間を用いて行われたニュートン力学の定式化において，われわれは時間の測定ということについて深く考えることがなかった，ということである．

ニュートンの力学の法則をおさらいしておこう．

第一法則（慣性の法則）：外力が作用していないとき，物体は静止しているか，等速度運動を続ける．
第二法則（運動の法則）：物体の加速度は外力に比例する．

静止とか等速度とかいう言葉は，何に対して静止や等速度運動をしているのか言わなければ意味がない．日常生活の範囲では地面に対して，ということで十分なのであるが，厳密な意味ではもちろん正しくない．むしろこのような慣性の法則が成り立っている慣性系が（絶対空間に）存在する，ということがこの法則の意味するところであろう．

第二法則は式で表すと，ニュートンの運動方程式

$$m\frac{d^2\boldsymbol{x}}{dt^2} = \boldsymbol{F} \tag{1}$$

になる．$\boldsymbol{x}$ はある慣性系の座標，t は時刻，$\boldsymbol{F}$ は外力である．

第一法則によれば，ある座標系で慣性の法則が成り立っていれば，それと等速度運動をしている座標系でも第一法則が成り立つため，その座標系もまた慣性系である．すなわち，慣性系をなす座標系 $(\boldsymbol{x},t)$ にガリレオ変換 $(\boldsymbol{x},t) \longrightarrow (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{v}t,t) \equiv (\boldsymbol{x}',t')$ を施した座標系 $(\boldsymbol{x}',t')$ もまた慣性系である．$\boldsymbol{v}$ は 2 つの座標系の相対速度を表し，これは一定値であるとする．ガリレオ変換では時間は変換の前後で不変であるから，これは絶対時間の一つの現れだと見ることもできる．また，ガリレオ変換によってニュートンの運動方程式は形を変えない．すなわち共変である．

しかし，19 世紀半ばに確立した電磁気学の基礎方程式であるマックスウェル方程式は，ガリレオ変換に対して共変ではなかった．光の速さは座標系の運動の向きによらず一定である，ということを示したマイケル

ソン・モーレイの実験（1887）は，このことの一つの現れであるが，このころからニュートン力学の基盤がゆらぎ始めた．

マックスウェル方程式を共変に保つのは，時間と空間が入れ混じって変換される，ローレンツ変換である．ここに至ってニュートン的な絶対時間・絶対空間といった考え方は終焉を告げた．

このような状況の中，アインシュタインは，どんな座標系で見ても光の速さは一定である，という光速度不変の原理と，物理法則はどんな慣性系で見ても共変である，という特殊相対性原理に基づいて理論を構築することを提唱した．この原理は，時間・空間概念を定義することなく，光速度に依拠している，として批判を受けたが，逆にアインシュタインは，ニュートン以来等閑にしてきた時間の測定のほうがより問題なのだと反論した．

すなわち，ニュートン力学において時間を測るにあたり，われわれは通常，ある座標系のどこかに置かれ，静止した時計を想像し，それによってその座標系での時間を測ろうと考える．しかしこの時計を用いたのでは，時計からの距離が無視できないような遠くで起こった事象の時刻を定めることはできない．その事象の時刻とその時計の時刻を比較するために使えるような，「瞬間的に到達する信号」は存在しないからである．

時間の概念に対して物理的な意義を与えるためには，各場所同士の関係を打ち立てることを可能にするある種の操作がなければならない．時間のこのような定義に対して，どんな操作を選んでもよいのだが，理論にとって都合がよいのはわれわれが確実なことを知っている操作を選ぶことである．そして真空中の光の伝播こそがふさわしい操作である，とアインシュタインは言うのである．同じ慣性系の各点に静止した時計を合わせるのに，光の伝播を用いればよい，というのである．つまり，距離 L だけ離れた点にある時計に向かって原点から光を出したとき，光が届いたときに，そこにある時計の針が，原点で光を出したときより L/c だけ進んでいれば，2 つの時計は正しく合っている，ということである．こうして時間の物理的意味づけができたあとで，光速度不変の原理と特殊相対性原理を用いれば，互いに等速度運動している慣性系同士の変換則はローレンツ変換にほかならないということがわかり，特殊相対性理論の世界が完成するのである．

特殊相対性理論は，その日常生活とかけ離れた突飛な予言により，アインシュタインの天才によるまったくの天啓の産物であるかのように受け取られがちであるが，（イ）電磁気学のマックスウェル方程式はガリレオ変換に対して共変ではなく，ニュートン力学の慣性系の変換則に対して疑問符が付されたこと，（ロ）光速度が慣性系の速度によらないことを示したマイケルソン・モーレーの実験，という時代背景の下で，ニュートン力学の要諦であった絶対時間・絶対空間を正しく疑ったことによる論理の産物であると評価すべきであろう．

天動説から地動説への転換は，「地球こそが宇宙の中心である.」という偏見を捨て去り，虚心坦懐に考えることによって初めて，地動説というより単純でニュートン力学への発展性も含んだ新しい考え方が得られた科学史上の大事件であった．同じように特殊相対性理論の誕生も，ニュートン力学の公準であった絶対時間・絶対空間を，形而上学的意味しか持ち得ないとして退場させることによって実現したのである．このような捉え方をすることによってこそ，われわれは相対性理論の出自からより多くのものを学ぶことができるものと信ずる．

4. 重力の理論

静電気学におけるクーロンの法則とニュートンの万有引力の法則はよく似た形をしている．静電気学を考える限りにおいては，電気力は遠隔力であると考えて差し支えないが，ひとたび運動する電荷の理論を考えると，われわれはこれを近接作用として捉え直さざるを得ず，それによってマックスウェルの電磁気学の体系ができあがったのは，よく知られているとおりである．これによって，相互作用としての電磁気学的信号は光速で伝わることが明らかになったわけであるが，そのような電磁気学の進歩は当然，万有引力たる重力はどのように伝わるのか？ という興味を惹起した．

ニュートンの万有引力には，重力の伝播という概念がまったく入っていない．2 つの物体の間の引力は最初から与えられているものであって，その距離が変われば，それとまったく同時に引力の大きさも変わってしまう，ということになっている．一方，特殊相対性理論の速度合成則に従えば，光速を越えて伝播する信号は存在しないから，重力も電磁力同様光速で伝わると予想される．ポアンカレやミンコフスキー，ゾンマーフェルトらはこのように考え，万有引力の法則を特殊相対論に矛盾しないように書き換えようとした．しか

し遠隔作用の取り扱いから種々の困難を来たし，うまくいかなかった．一方，ノルドストレームは，電磁場と同じように重力場というものを導入し，特殊相対性理論と整合的な理論を構築した．しかしこの理論は，ニュートン力学の謎の一つであった水星の近日点移動を観測値と逆さまに与えてしまったので，やはり失敗に終わった．

特殊相対性理論が，ニュートン力学という金字塔の深奥に潜む絶対時間・絶対空間という亡霊からの解放において実現したのと同じように，伝播概念を正しく含んだ新しい重力理論は，特殊相対性理論の限界を見つめ，その問題点を解決しようとの機運の中において誕生することになった．すなわち，特殊相対性理論は，物理法則を絶対時間・絶対空間から解放し，より普遍的に定式化することに成功したものであったが，一方では各慣性系の間の共変性を主張したものに過ぎず，慣性系でない座標系まで含めたすべての座標系における普遍性を実現したものではない，という限界を持っていた．特殊相対性理論は，絶対時間と絶対空間という 2 つの形而上学的概念から物理法則を解放することには成功したものの，慣性系という時空連続体の優位性，絶対性は残ったままだったのである．この絶対性とは，アインシュタインの言葉を借りれば，「物理学的に実在するばかりでなく，その物理的な性質においては独自なものであり，物理的な効果は持ち得るが，それ自身物理的条件によっては影響されない」ことを意味する．このように「それ自身は作用するが，他の影響を受けることはないもの」を考えようとするのは，科学的なものの考え方に反する．ニュートン力学における絶対空間はまさにそのようなものであり，それ故にマッハによって厳しく批判されたものであった．

さて，ニュートン力学において，慣性系だけでなく，一般の運動座標系における物理の記述を考えよう．ある慣性系に対して加速度 $\boldsymbol{a}$ で運動している座標系における運動方程式は，便宜的に

$$m\frac{d^2\boldsymbol{x}}{dt^2} = \boldsymbol{F} - m\boldsymbol{a} \tag{2}$$

と表される．右辺に現れた新しい項は，よく知られている慣性力である．この方程式は，地表付近のように重力加速度 $-\boldsymbol{g}$ が働く中での運動方程式

$$m\frac{d^2\boldsymbol{x}}{dt^2} = \boldsymbol{F} - m\boldsymbol{g} \tag{3}$$

によく似た形をしている．しかしながら (2) 式の右辺に現れる m は慣性質量である一方，(3) 式の右辺に現れる m は重力質量であるという大きな違いがある．

慣性質量は力の働いた物体の動きにくさを表す物理量であるのに対し，重力質量は万有引力に対する応答のしやすさを表すものであり，その出自はニュートン力学においてはまったく関係の付かないものである．ところが，エートベッシュの実験（1896）が示すように，慣性質量と重力質量の比は物質の種類や量によらず一定であり，われわれはその比の値を 1 と置くことによってニュートンの重力定数を定義している．すなわち，慣性質量と重力質量はまったく同じ値を持つことが実験的に知られている．この数値的同値性がこの 2 つの概念の真の性質の同等性に帰着されたときに初めて，このような数値的同等性を与える科学が正しいとされる，とアインシュタインは考えた．

逆に，このような同値性から出発すると，重力と慣性力を区別する理由がなくなってしまう．すなわち，重力の働いているある点で，その点での重力加速度と同じ加速度を持って運動する座標系に移ると，逆向きの慣性力によって重力が消し去られるので，それ以外の外力がない場合にはその点に置かれた質点はその運動座標系で見ると等速度運動をしているように見える．すなわちこの加速度運動している座標系は慣性系である．このように適切な座標変換によって加速度系に移ることによって重力を消し去り，慣性系にすることができるということを等価原理と呼ぶ．この原理は明らかに，慣性質量と重力質量の同等性の法則と密接な関係にあり，特殊相対性原理を，互いにより一般的な運動をしている座標系間に拡張するよすがを与えるものである．ただし，重力の強さは，ニュートン重力においてさえ場所ごとに異なるから，このような慣性系への座標変換は大域的に行うことはできず，局所的にしか定義できない．このように局所的に重力が消去されて慣性の法則，ひいては特殊相対性理論が成り立っている系を局所慣性系と言う．

等価原理は，例えば次のような興味深い現象を予言する．地表付近のように一様な重力場のある中を自由落下する箱の中に，地表面に平行に光束が入射したとする．自由落下する系は慣性系であるから，そこでは特殊相対性理論が成り立ち，箱の中にいる人が見れば，光はまっすぐに進むように見える．しかし自由落下する人にとってまっすぐ進むということは，地表に止まっている人がこの光束を見ると，箱とともに落下しながら斜めに進むように見えるということである．箱の中と地表の違いは，地表にいる人は地球の重力が働いて

いることを感じているということである．すなわち，重力場の中では光は曲がって進む．特に，光束の上側（地表と遠い側）と下側（近い側）に注目すると，光がこのように曲がるというのは，光の波面の地表に遠い側がより長い距離を進むことによって起こるのであるから，重力ポテンシャルの低い上側を通る光のほうがより速く進むということである．このような指摘をアインシュタインが1911年に行ったときには，あまり注目を引かなかった反面，光速度が重力場の状態によって変化する，という主張は特殊相対性理論に反するものであるとして，アブラハムらから強い批判を受けた．

等価原理に基づいて，座標変換によって重力と慣性力を重ね合わせたり，互いに消去できたりするということは，こと重力が対象に含まれる場合には，慣性系と非慣性系の区別はもはやできないということを意味し，慣性系同士の関係だけを問題にした特殊相対性理論では不十分であることがわかる．これはまた，慣性と重力の数値的同値性を，それらの性質の統一によって説明する可能性を生じさせるものであり，それを実現するには，慣性系にとどまらぬ一般的な座標を用いなければならない，ということになる．そこで，特殊相対性原理を拡張して，次の一般相対性原理を採用する．

一般相対性原理：「すべての物理法則はいかなる座標系においても同じ形式で表される．」あるいは，「物理法則はすべて一般座標変換に対して共変な形式に書き表される．」

さて，幾何光学によれば，真空中を進む光は最短経路を進むが，先の例で重力場中で光が湾曲するということは，重力場の中ではユークリッド幾何学が成り立たないことを示唆する．

このことは，より直接的には以下のような状況を考えるとさらにつまびらかになる．すなわち，ある慣性系の原点を中心に等速円運動をしている剛体円盤を考える．そしてその円盤に乗って円盤の静止系に移り，そこで剛体のものさしを使って円盤の直径と円周を測ることを考える．このように回転している円盤上の各点に立った観測者は，遠心力という慣性力を動径方向に感じ，一般相対性理論によれば，慣性力と重力は区別のつかないものであるから，この座標系において観測者は常に動径方向に重力を感じることになる．一方，観測者の持つ速度は動径方向と常に直交しているから，円盤の直径はローレンツ収縮を受けず，その長さは円盤が慣性系で静止している場合と同じ値になる．それに対し，円周の長さを測ると円盤の速度は接線方向を向いているのだから，ものさしは円周に沿ってローレンツ収縮を起こすことになり，こうして求めた円周の長さは直径に円周率をかけた値よりも小さくなる．すなわちこのように重力場の存在下ではユークリッド幾何学は成り立たないのである．

このように，光速度不変の仮定を原理として出発した1905年の特殊相対性理論から上のような光速の変化が引き起こされる一般の場合に拡張することは，曲がった時空間の取り扱いを必要とする，容易ならざることであり，これを正しい論理的根拠の上に構築するためには，新しい数学が必要であった．アインシュタインは1912年にチューリッヒに帰ってきたときに，同窓の親友であった数学者マーセル・グロースマンにこの問題を相談した．その結果リーマン幾何学がその目的に役立つことを知り，この微分幾何学の体系の中からグロースマンの助力により，自分の望むものを取り出そうとした．それによって初めて，一般相対性原理のしっかりとした数学的定式化を見出すことができた．1913年のことである．この論文には，すべての式はリーマン幾何学における共変性を保つように構成されなければならない，ということが見てとれるとともに，空間曲率がどのように重力の法則に入るべきであるか，ということに関する推察は述べられていた．しかしこのときはまだ，重力場の方程式がどのように決定されるかはっきりとは示されていなかった．これがなされたのは1915年の論文であり，それによって一般相対性理論が完成したのである．

ニュートンの重力理論では，重力ポテンシャルという1個の関数で重力場の様子が記述できたのに対し，一般相対性理論では，重力場は微小座標距離隔てた2点間の時空距離を表す係数である計量テンソル $g_{\mu\nu}(x)$ という4次元対称行列で表される．これはちょうど静電気学においてはクーロンポテンシャル1個で済んだものが，時間変化する電磁場を扱う際にはベクトルポテンシャルも必要となり，4次元ベクトル関数によって電磁場の振舞いが記述されるようになったのと対比できる．この計量テンソルを規定するアインシュタイン方程式は，

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \qquad (4)$$

と書け，これはエネルギー・運動量を表す $T_{\mu\nu}$ がニュートンの重力定数 G を介して時空間の曲がり具合 $R_{\mu\nu}$，と計量テンソル $g_{\mu\nu}$ と結びついている，という形をし

ている．物質が時空間のあり方に影響する，という点においてはこれはマッハの原理の一部を実現したものであるとも言える．

5. おわりに

よく知られているように，こうして構築された一般相対性理論は，水星の近日点移動を見事に説明したのを初めとして，その予言である重力場中での光線の歪曲もエディントンによって検証された，など数多くのテストに耐えた素晴らしい理論である．

ここに至るまでの経緯を検討すると，一般相対性理論は，① 既成概念の盲点を見きわめ（慣性系），② 自然現象の中に新しいヒントを探し（重力質量と慣性質量の数値的同等性），③ 新しい数学という道具を用いて（リーマン幾何学），初めて世に出ることができたのだ，ということがわかる．

初めに述べたような理由で，これからアインシュタインそのものを研究するのは困難であるにしても，その応用である宇宙論に山積する数多くの問題を解決する基礎理論を打ち立てる上で，アインシュタインの軌跡は実に多くのヒントを提供しているように思われる．そして，現在の宇宙における②は，以降で述べられるダークエネルギーがその最右翼であることは，疑いないように思われる．

（よこやま・じゅんいち，東京大学大学院理学系研究科附属
ビッグバン宇宙国際研究センター）

重力波観測による宇宙物理学

柴田　大

1. 重力波

重力の基礎理論は一般相対論であり，その基礎方程式はアインシュタイン方程式である．一般相対論によれば，天体が存在すると時間と空間（略して時空）が曲がる．この時空の曲がりが重力そのものである．天体の密度が大きければより大きく時空が曲がるので，重力はより強い．そのためブラックホールや中性子星といった高密度天体の周りでは，重力が強くなる．

では天体が動けば何が起こるだろう．当然，曲がっている場所が動く．しかしそれだけでは済まない．曲がり具合の変化に伴って，わずかな時空の歪みが，光速で周りに伝播する．これが重力波である．重力波はアインシュタイン方程式の解として存在するが，それは丁度，電磁波が電磁気学の基礎方程式であるマクスウェル方程式の解として存在するのと似ている．

電磁波は，我々の日常生活の至る所で利用されている．そもそも太陽から電磁波（可視光線）が降り注いでいるおかげで，我々は生きていける．テレビが見られるのも携帯電話が使えるのも，電磁波のおかげである．さらに電磁波は宇宙を観測するのにも役立っている．太陽の表面温度が約 6000 度 K で，半径が約 70 万 km といった事実は，電磁波観測から得られる．ビッグバン宇宙論の証拠もすべて，電磁波観測から得られている．電磁波は光速で伝わるので，迅速な通信や遠くの観察に有利である．だから利用される．

一方，同じ光速で伝わる波であるにも関わらず，重力波はこれまでに全く利用されていない．それは，電磁波に比べて物質との相互作用が圧倒的に弱いからである．実際これまで，重力波が直接検出できたことはない．だから当然，利用できなかった．

検出し難いことがそんなに悪いことかと言えば，実はそうではない．天体観測において，電磁波とは全く違った利用が可能になり得るのである．電磁波は物質との相互作用が強いので，我々が容易に検出できその結果，多種多様な利用が可能になったが，相互作用が強過ぎる弊害もある．例えば太陽を考えてみよう．太陽はガス体だが，電磁波で観測できるのはその表面だけである．その中がどうなっているか，電磁波観測から直接知るのは不可能である．内部からやって来る電磁波は途中でガスと相互作用するため，発生した時点での様相が変わってしまうからである．つまり，物質が密に存在する場合，対象天体の深部を直接観測するには適さない．逆に，物質との相互作用が極めて弱い重力波は，天体の深部を直接観測することが得意と言える．

また，すべての天体が電磁波を放射するわけではない．例えば，ブラックホール同士の連星から重力波は放射されるが，電磁波は放射されない．こういった天体を見つけるには電磁波ではなく重力波を観測しなくてはならない．このように重力波は，未知の天体を観測するのに優れている可能性もある．電磁波による観測とは相補的な役割を担い得るのである．

もっとも，重力波は容易に大量発生しない．最初に述べたように，曲がった時空が変化すると重力波が発生するが，その曲がり具合が大きく，かつ変化が速くないと，大量発生しないからである．大きな曲がり具合を要求すると，ブラックホールや中性子星といった比較的珍しい高密度天体が必要になる．さらにそれらが高速度で動いたり，振動したりしなければ，重力波は大量発生しない．それでもそのような天体現象が，宇宙に存在すると考えられている．その代表例が，中性子星やブラックホールからなる近接連星の合体である．こういった現象は，電磁波で観測されたことはない．重力波を検出することによって，初めて観測が可能になると考えられている．上記以外にも，大質量星の重力崩壊や非軸対称変形した高速回転中性子星などが重力波源の候補である．

2. 重力波の理論

数式を用いて多少詳しく，重力波について説明しよう．先に述べたように，重力波は下のアインシュタイン方程式の解として存在する．

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \tag{1}$$

ここで，$G_{\mu\nu}$ はアインシュタインテンソル（時空の曲がり具合）を，$T_{\mu\nu}$ はエネルギー運動量テンソル（物質分布と運動状態）を表す*1)．G と c は万有引力定数および光速である．$G_{\mu\nu}$ を時空の計量 $g_{\mu\nu}$ を用いて書き下すと，(1) 式が $g_{\mu\nu}$ に対する 2 階の偏微分方程式をなすことがわかる[1]．

さてここで，$\sqrt{-g}g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + \tilde{h}^{\mu\nu}$ と形式的に書く．g は $g_{\mu\nu}$ の行列式，$\eta^{\mu\nu}$ は平坦な時空の計量，そして $\tilde{h}^{\mu\nu}$ は一般的には時空の曲がり具合を表す．ゲージ条件（座標条件）としてハーモニックゲージ $\Box x^\mu = \sum_{\nu=0}^{3} \partial_\nu(\tilde{h}^{\mu\nu}) = 0$ を採用すると（$\Box$ は平坦時空のダランベルシアン），(1) 式は以下のような方程式へと変換される[1]．

$$\Box \tilde{h}^{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4}(T^{\mu\nu} + \tau^{\mu\nu}). \tag{2}$$

ここで，$\tau^{\mu\nu}$ は $\tilde{h}^{\mu\nu}$ の 2 次以上の項からなる関数である．今簡単のために，重力は至る所で弱いと仮定し，$\tilde{h}^{\mu\nu}$ の 2 次以上の項を無視しよう．すると (2) 式は，エネルギー運動量テンソルを源とした波動方程式に帰着する．つまり，物質の分布が変化すると，それに伴って時空の歪みが光速で伝わっていくことを意味する．すなわち，重力波の存在が示される．

重力波源から r 離れた場所での重力波 h_{ij} は，4 重極公式を使って近似的に次のように書ける[2]．

$$h_{ij}(t,r) = \frac{2G}{rc^4}\left[\frac{d^2 I\!\!\!-_{ij}}{dt^2}\left(t - \frac{r}{c}\right)\right]^{TT}. \tag{3}$$

$I\!\!\!-_{ij}$ は物質が作る 4 重極子テンソルのトレースゼロ部分，TT は進行方向に対して横波かつトレースゼロの成分を取ることを表す．(3) 式は，非球対称かつ非定常な物体からのみ，重力波が放射されることを示している．

直交座標 (x_1, x_2, x_3) を用いた場合，重力波が通過しないときの 2 点間の距離の 2 乗は，$dl^2 = dl_0^2 \equiv \sum_{i=1}^{3} dx_i^2$ と書ける．一方，重力波が通過すると，

$$dl^2 = dl_0^2 + \sum_{i,j=1}^{3} h_{ij}dx_i dx_j \tag{4}$$

と変化する．つまり時空が曲がって，その結果 2 点間の長さがおよそ hdl_0 だけ変化する（h は重力波の特徴的な振幅を表す）．

ところが，重力波が引き起こす 2 点間の長さの変化は微小である．例えば，合体直前の連星中性子星を考えよう．その合計質量，軌道半径，および軌道角速度を M, R, Ω とすれば，$d^2 I\!\!\!-_{ij}/dt^2$ の大きさはおよそ $MR^2\Omega^2$ と書き表せる．すると (3) 式から，重力波の振幅は

$$h \sim 2 \times 10^{-18}\left(\frac{3\,万光年}{r}\right)\left(\frac{M}{2.8M_\odot}\right) \times \left(\frac{R}{30\ \mathrm{km}}\right)^2\left(\frac{f}{1.2\ \mathrm{kHz}}\right)^2 \tag{5}$$

と見積られる．ここで，$M_\odot$ は太陽質量を，f は重力波の周波数（Ω/π）を表す．連星中性子星の合計の質量は，典型的には $2.8M_\odot$ である．また合体直前の軌道半径と重力波周波数はそれぞれ約 30 km, 1.2 kHz である．よって，連星中性子星の合体が大変運良く（脚注 5 参照）我々の銀河系中心（我々からの距離が約 3 万光年）で起こったとしても，h は約 10^{-18} と微小である．1 km の棒が，わずか 10^{-13} cm（原子核の半径程度）伸び縮みするのに相当する．これが，重力波の直接検出を困難にしている最大の理由である．しかし，次節で述べるように重力波は近々直接検出されるに違いない．

ところで，系の特徴的速度の大きさは，近似的に $R\Omega$ である．したがって，速度が大きい方が h が大きい．また，重力波源の持つ運動エネルギー（$MR^2\Omega^2$ のオーダー）と重力束縛エネルギー（GM^2/R のオーダー）は，通常同程度の大きさである．よって，$\Omega^2 \sim GM/R^3$ の関係が大雑把に成り立つ．これを (5) 式に代入すると，波源のコンパクトさ（重力の強さ）を表す無次元量 GM/Rc^2 が大きいほど，h が大きくなることがわかる．つまり，強重力天体が高速度で運動したときに高振幅の重力波が放射されることが，(5) 式から読みとれる．

3. 重力波検出器

重力波を用いて天体観測を行う場合，2 つの興味深い周波数域が存在する．一つは 10–10^4 Hz の高周波数域であり，もう一つが 10^{-4}–1 Hz の低周波数域である．本稿では，高周波数域の重力波にのみ焦点を当て

*1) 本稿では，ギリシャ文字の添字は 0（時間），1–3（空間）を取り，ラテン文字の添字は空間成分を取る．

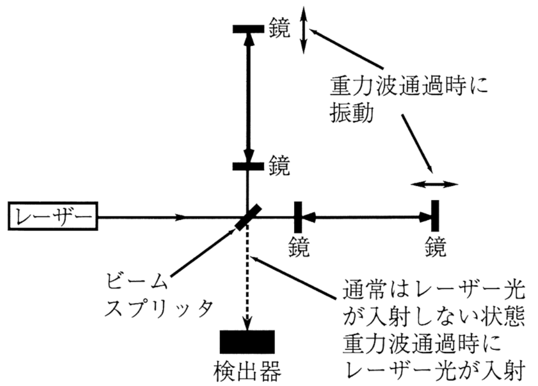


図 1　レーザー干渉計の概念図．

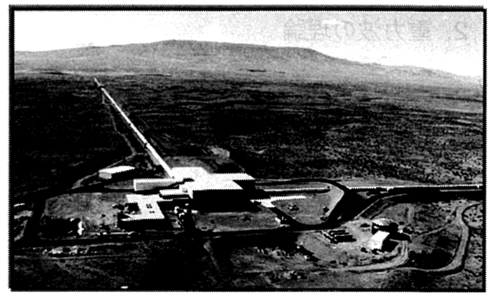


図 2　アメリカハンフォードに建設されたレーザー干渉計型重力波検出器 LIGO．腕の長さが 4 km のものと 2 km のものとがある．LIGO グループホームページ http://www.ligo.caltech.edu より．

る[*2]．

高周波数域が興味深いのは，中性子星や恒星サイズのブラックホールなど，存在の知られた天体が関わる物理現象によって，この帯域の重力波が効率良く放射されると予想されるからである．例えば，太陽質量の 3 倍のブラックホールが何らかの非球対称過程で形成されたとしよう．その場合，発生する重力波の周波数は 5,000 Hz 程度である．ブラックホールは，質量が太陽の約 3–100 倍の恒星や中性子星から形成されると考えられるので，その形成過程でおよそ 100–5,000 Hz の周波数の重力波が発生すると予想される．

高周波数域の重力波を観測するために，現在数カ国において，キロメートルサイズのレーザー干渉計型検出器が稼働中である．ここで言うレーザー干渉計とは，図 1 のような構造を持つ．まずレーザーをビームスプリッタに向けて入射させる．それをビームスプリッタにおいて 2 つに分け，2 本の直交する腕にそれぞれ入射させる．2 本の腕の両端には反射鏡を置き，レーザー光が跳ね返るように設定しておく．また，それぞれの腕の内側部分にも反射鏡を置き，終端の反射鏡から跳ね返ってくるレーザー光の一部を再び跳ね返すように設計する．これは，腕の長さよりもレーザーの伝播距離を遥かに長くするためである．典型的な検出器においては，腕の長さ数 km に対して，レーザーの伝播距離はおよそ数百 km になるように設定されている．それぞれの腕に入射した光は，やがてビームスプリッタに戻ってくる．これが完全に干渉した状態になるようにデフォルト（重力波が存在しない状態）では設定しておく．

重力波がやって来ると，その伝播方向と垂直方向の空間の距離が非等方に伸び縮みする．仮に伝播方向を z 軸方向とすれば，x 軸および y 軸方向の空間が伸び縮みする．その際，x 軸方向が伸びれば，y 軸方向が縮む，といった伸び縮みが引き起こされる．したがって，重力波がレーザー干渉計を通過すると，それぞれの鏡の間の距離が異なる様相で伸び縮みし，その結果ビームスプリッタでの干渉が崩れ，検出器に向かってレーザー光が入射する．それを観測することによって，重力波の検出がなされる．

現在稼働中のレーザー干渉計の中では，アメリカの LIGO が最も大型で感度が高い（図 2）．腕の長さが 4 km の干渉計で，約 10^{-22} 以上の振幅の重力波を捕らえることを最終目標としている．ワシントン州とルイジアナ州の 2 つの実験場に計 3 台（1 台は腕の長さが 2 km）のレーザー干渉計が設置されている．図 3 に LIGO で予定される最終目標感度曲線を示す．図の中には 2 組の帯状の曲線が引かれているが，感度が劣る方は初期 LIGO の感度曲線で，これは 2004 年の夏時点で大体達成されている．一方感度が高い方は，次期 LIGO の最終到達目標である．各帯状の線の下限は，検出器の純粋な雑音の大きさを示す．

実際の観測では，重力波の信号の振幅と検出器の雑音の振幅の比が 5 程度以上の場合にのみ検出が認定される．それ以下の場合には，捕らえた信号が偽物である確率が高すぎるからである[*3]．また，重力波の検出器に対する入射方向次第では，検出される信号は実際の振幅よりも小さくなる．検出器の作る面に対して垂

*2)　低周波数重力波の検出を目的として，NASA と ESA による LISA 計画が存在する．これは，3 台の人工衛星を地球の公転軌道上に打ち上げ，500 万 km の長さの干渉計を作る計画である[4]．約 10 年後の稼働を目指すとされているが，進み具合は米政府の財政支援状況に依るため確定していない．

*3)　検出器の既知の雑音源以外にも様々な未知の雑音源が存在し，それらが振幅の小さい本物の信号のように振る舞うことが多々あるからである．

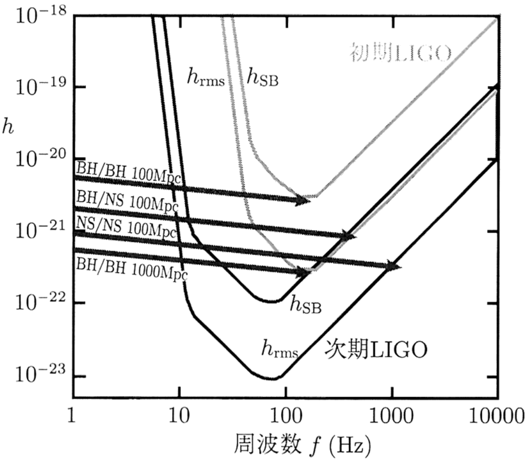


図3 LIGOの予想感度およびコンパクトな星の連星からの重力波のスペクトル．$h_{\rm rms}$ は検出器の雑音のスペクトルを，$h_{\rm SB}$ は約 $11h_{\rm rms}$ を表す．NSとBHはそれぞれ，$1.4M_\odot$ と $10M_\odot$ の中性子星とブラックホールを表す．矢印の先端辺りの周波数で，合体が始まる．なお100 Mpcとは，およそ3億2600万光年である．

直方向から入射した場合のみ，振幅の大きさに等しい信号が得られるからである．平均的には，振幅に対して40%強程度の信号しか得ることはできない．これらの事実を考慮すれば，重力波の振幅が雑音の振幅 $h_{\rm rms}$ の約11倍以上になる場合にのみ，重力波は検出されると考えるべきである．そこでそれを $h_{\rm SB} \approx 11h_{\rm rms}$ と定義して，合わせて図示してある．$h_{\rm SB}$ が検出のための実質的感度とみなされる．

LIGO以外にも海外では，イタリアで3 kmの腕を持つVIRGOが，ドイツで600 mの腕を持つGEO600が稼働中である[3]．日本では，300 mの腕を持つTAMA300が1999年から断続的に稼働している．日本人研究者はさらに，3 kmの腕を持つ大型レーザー干渉計LCGTを岐阜県神岡鉱山の地下に作る計画を提案している．

これらの検出器に対する最も有望な重力波源は，ブラックホールや中性子星からなる連星の合体である．図3に，その予想される重力波のスペクトルを示す（波形については図5参照）．ここでは，ブラックホールを $10M_\odot$，中性子星を $1.4M_\odot$ と仮定している．仮に次期LIGOが完成すれば，1500 Mpc（約50億光年）の距離の連星ブラックホールの合体を，また300 Mpc（約10億光年）の距離の連星中性子星の合体を捕らえることができる．

4. 重力波観測がなぜ期待されるのか

電磁波を利用した天文学は，膨大な観測データを提供し，様々な事実を明らかにしてきた．その中に，中性子星とブラックホールの存在の実証もある．しかし，未だに観測されていない天体や天体現象がある．重力波検出によってなされそうな発見をかいつまんで説明しよう．

4.1 ブラックホールの直接検証

ブラックホールの存在は，これまで電磁波観測によって証明されてきたが，それはある意味間接的である．なぜならば，質量が大きくて，電磁波を放射しない天体の証拠を発見したに過ぎないからである[5)*4)]．つまり，ブラックホール近傍の曲がった時空そのものが直接観測されたことはない．ブラックホールの誕生の様子が観測されたこともない．これらの観測は，重力波によって初めてなされると期待されている．

ブラックホールを観測するのに重力波が優れている理由は3つある．1つは，ブラックホール誕生時に生じる重力波は，ブラックホールのごく近傍で発生することが分かっている，という点である．つまり，ブラックホール近傍の時空の曲がり具合を強く反映し，その情報を運んで来る．

2つ目は，ブラックホール近傍で発生する重力波は，その後吸収・散乱過程を全く経ずに我々まで到達する，という点である．つまり，発生したままの状態が保存され運ばれて来る．先に述べたように，電磁波は物質によって吸収・散乱を受けやすいので，通常は，発生時とは様相を異にして観測される．よって，ブラックホールの直接的証拠を確実に得るには不利である．一方，重力波はそれを得意とする．

3つ目は，ブラックホール近傍から放射される重力波の波形は詳しく知られている，という点である．ブラックホール近傍で放射された重力波は，大きな曲率のため散乱されるが，その際，準固有振動周波数と呼ばれる共鳴周波数を持つ成分が増幅され，外部に向かって伝播する．準固有振動周波数は，ブラックホールの質量とスピンのみで決まることが理論的によく分かっている．これは，ブラックホールが質量とスピ

*4) 例えば，ブラックホールが恒星との連星であれば，恒星の公転運動を観測することでブラックホールの質量に制限を与えられる．その結果，質量が中性子星に比べて十分に大きければ，ブラックホールと認定される．この方法ではブラックホール本体およびその近傍は直接観測されていないが，その存在が証明される．

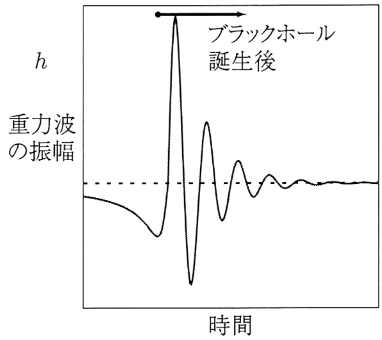


図 4　ブラックホール形成時に放射される重力波の予想波形．準固有振動の励起による減衰振動が特徴である．

ンによってのみ特徴付けられる天体だからである．

図 4 に典型的な波形の摸式図を示した．特徴的なのは，周波数がほぼ一定なこと，および減衰振動であること，の 2 点である．すなわち，波形は

$$e^{-t/t_d}\sin(2\pi ft+\delta) \tag{6}$$

の形で表現できる．ここで，t_d, f, δ は，それぞれ減衰時間，周波数，位相を表すパラメータで，t_d と f はブラックホールの質量とスピンにのみ依存する．よって，図 4 のような特徴的な波形を持つ重力波を捕らえることができれば，ブラックホールの存在が直接検証され，しかも f と t_d から質量とスピンが決定される．

さて，重力波を用いてブラックホール誕生の瞬間を捕らえたと仮定しよう．すると，重力波の性質のおかげで，1) ブラックホール誕生時の様子が観測され，2) 存在の直接的証拠が得られ，3) 曲がった時空の様子が観測され，4) ブラックホールの質量やスピンが決定される可能性がある．これらはすべて，人類が成し得ていない課題である．

具体的には，連星ブラックホールの合体や大質量星のブラックホールへの重力崩壊において，重力波が大量発生し得る．これらの現象で放射される重力波が観測され，形成されるブラックホールの詳細が明らかにされると予想されている．

4.2 連星中性子星の合体：中性子星の新しい研究法

連星中性子星の合体は，最良質の重力波源と言える．それは，1) 十分な数の合体が検出可能と予想できること[*5)]，2) 他の重力波源に比べてその波形を予想し易く，発見の検証に有利なこと，の 2 つの理由による．

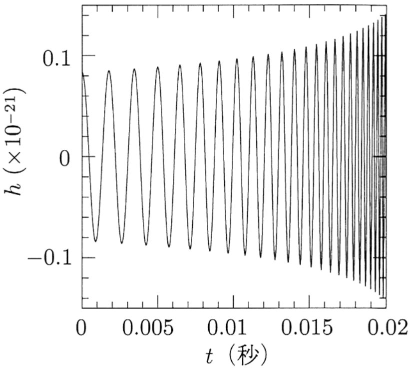


図 5　合体直前の連星中性子星からの重力波の予想波形．我々から 14 Mpc の距離にあると仮定している．2 つの星は共に $1.4M_\odot$ とした．横軸は時間で，縦軸は振幅を表す．

連星中性子星は，2 回の超新星爆発の結果形成される．その後，重力波を放射しながら軌道半径をゆっくり縮めて行き，やがて合体に至る．合体直前には，10 Hz 以上の重力波を放射する高周波数重力波源になる．この場合，図 5 に示すような波形の重力波が放射される．サイン曲線に近い波形になるのは，連星がほぼ定常な円軌道を持つからである．一方，軌道半径は徐々に縮まるので振幅と周波数が上がる．このような波形はチャープ波形と呼ばれる．次期 LIGO が完成すれば，これが年間 10–100 回観測されると推測されている．

チャープ波形からは連星中性子星の個々の質量が決定できる．10 年間の観測で，100–1000 個の中性子星の質量が決定されるだろう．すると中性子星や連星中性子星の質量の統計分布が得られる．これは連星中性子星の誕生過程や中性子星の性質を明らかにするのに，大変役立つ[*6)]．

さて，中性子星には許される最大質量が存在する．つまりある閾値よりも質量が大きいとブラックホールへと重力崩壊してしまう．この最大質量は，中性子星の状態方程式に依存する．ここで状態方程式とは，大雑把に言えば，密度と圧力の関係であり，これは高密

*5)　連星中性子星の合体は，1 つの銀河内でおよそ 1 万–10 万年に 1 回起こると推定される．LIGO に代表される地上重力波検出器[3)]の最終目標感度が達成されれば，我々から約 300 Mpc 以内の距離にある連星中性子星の合体は検出可能である．よって，その半径内にあるすべての銀河を考慮すれば，年間 10–100 回程度，合体が検出可能と予想される[6)]．

*6)　太陽半径程度の軌道半径を持つ連星中性子星は，銀河系内に 1 万個程度存在すると考えられている．事実，電波観測によっていくつかは発見されているが，質量が正確に決定されたのはわずか 4 組であり，十分な統計が得られていない[7)]．なお，得られた中性子星の質量は，偶然かどうか不明だが 1.24–$1.44M_\odot$ と狭い範囲に収まっている．一方，最近の中性子星—白色矮星連星の観測から，質量が $2M_\odot$ を超える中性子星（PSRJ0751+1807 と呼ばれる）の存在が示唆されているが，今のところ誤差が大きく質量は確定していない[8)]．

度原子核物質の相互作用に強く依存する．中性子星の密度は高く（約 10^{15} g/cm^3 で原子核密度の 3–4 倍），このような高密度の物質を実験室で作るのは難しいため，状態方程式は正確には分かっていない．よって，最大質量も決まっていない．しかし重力波検出によって多数の中性子星の質量が決まり，仮に $2M_\odot$ を超える重いものが見つかれば，最大質量にこれまでにない制限が課される．つまり，重力波によって中性子星の内部構造を間接的ながら「覗く」ことが可能になるかもしれない．

連星中性子星以外にも，連星ブラックホールやブラックホールと中性子星の連星が存在し，重力波を放射しているものと考えられる．これらも有力な重力波源であり，また検出されればブラックホールや中性子星の質量が決定される．この場合，ブラックホールの質量やスピンの統計分布も得られると期待される．

4.3 γ 線バーストの正体を探る

1990 年代以降注目されている謎の現象として γ 線バーストがある[9]．これは，γ 線を主に放射する突発的な天体現象で，多くは，我々の銀河系から遠く離れた銀河系で発生している．時間変動がミリ秒程度の変化の激しい現象で，さらに，発生するエネルギー総量は太陽が一生で生成する量（約 10^{44}J）にも匹敵する．このように特異な現象なので，その発生源は一般相対論的な天体，具体的には，恒星サイズの質量のブラックホールと降着円盤からなるもの，と推測されている．同じ場所で 2 度は繰り返さないので，その発生源は何らかの現象の結果形成され，やがてすぐに静的なブラックホールへと落ち着く，と考えられている．その現象の候補とされているのが，大質量星の重力崩壊や連星中性子星の合体である．

最近さらに，γ 線バーストは 2 種類存在することが観測から明らかになりつつある[10]．一つは，継続時間が長く（2 秒以上 γ 線放射が続く），全放射エネルギーが 10^{44}J 程度であることが特徴である．これはロング γ 線バーストと呼ばれる．もう一つは，継続時間が短く（2 秒以下しか γ 線放射が続かない），全放射エネルギーが 10^{42}J 程度と小さい．これはショート γ 線バーストと呼ばれる．ロング γ 線バーストの少なくとも一部は，超新星爆発と同時に観測されており，大質量星の重力崩壊によって発生源が形成されると考えられている．一方，ショート γ 線バーストの起源は今のところ分かっていない．対応天体が観測されていないからである．支持を集めている仮説として，連星中性子星の合体がある．つまり，連星中性子星の合体後にブラックホールと降着円盤が誕生するとするシナリオである．

重力波検出はこの問題に決着をつけるかもしれない．前節で述べたように次期 LIGO を用いれば，我々から 300 Mpc 以内で起こる連星中性子星の合体直前に放射される重力波の検出が可能だからである．もしも仮説が正しければ，重力波と γ 線が同じ方向からほぼ同じ時間に到来するであろう．これを示せば，この問題に答を与えることができる．

また 1 節で述べたように，重力波は透過性が極めて強い．したがって，γ 線では通過できないような高密度な環境を超えて我々までやって来る．γ 線バーストの中心天体はブラックホールからなるものと思われるが，仮にその周りから γ 線バーストの発生に伴って何らかのバースト的重力波が放射されるとしよう．すると発生源の状態を我々に運んで来る可能性が高い．すなわち，未知の発生源（または発生源の母天体）の詳細を明らかにするのに貢献する可能性もある．

4.4 重力波バースト??

前節で紹介した γ 線バーストは，ほとんどのエネルギー放射を γ 線で行っている天体現象である．そのためつい最近まで，γ 線以外の観測データはほとんどなかった．同じように，重力波以外放射しない未知の天体の存在を否定する理由はない．こういった天体の発見が，実は最も期待されている．

参考文献

1) ランダウ，リフシッツ『場の古典論』東京図書 (1978).
2) 例えば，佐々木 節『一般相対論』産業図書 (1996).
3) 重力波検出器，アメリカの LIGO，日本の TAMA300，ドイツ・イギリス共同の GEO600，フランス・イタリア共同の VIRGO に関しては，それぞれ，http://www.ligo.caltech.edu/, http://tamago.mtk.nao.ac.jp/, http://www.geo600.uni-hannover.de/, http://www.virgo.infn.it/ を参照してほしい．
4) LISA のホームページは，http://lisa.jpl.nasa.gov/.
5) 例えば，嶺重 慎『ブラックホール天文学入門』裳華房 (2005).
6) V. Kalogera et al., *Astrophys. J.* **601** (2004), L179: **614** (2004), L137.
7) I.H. Stairs, *Science* **304** (2004), 547.
8) D.J. Nice et al., *Astrophys. J.* **634** (2005), 1242.
9) B. Zhang and P. Mészáros, *Int. J. Mod. Phys.* A **19** (2004), 2385.
10) D.B. Fox, et al., *Nature*, **437** (2005), 845.

（しばた・まさる，東京大学大学院総合文化研究科）

宇宙の加速膨張

暗黒エネルギー，それとも未知の重力法則？

須藤 靖

1. はじめに

宇宙は現在膨張している．この事実は1929年，エドウィン・ハッブルによって観測的に発見された．その結果，宇宙には始まりも終わりもなく常に同じ状態のまま永遠に存在し続けるとする「静的」宇宙観は破棄され，進化する「動的」宇宙観が市民権を得た．その約70年後，さらにこの膨張は加速していることが示された．この結果は，米国の科学雑誌 *Science* によって1998年のブレイクスルーに選ばれている[1]．

これらをあえて正確とは言えない表現で説明すれば以下のようになる．時刻 t における宇宙の「半径」を $R(t)$ としよう．現在の時刻 $t=t_0$ において，時間に関してテイラー展開すれば，

$$R(t) = R(t_0) + \left.\frac{dR}{dt}\right|_0 (t-t_0) + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2R}{dt^2}\right|_0 (t-t_0)^2 + \cdots \qquad (1)$$

となる．この右辺の項は順に，現在の宇宙のサイズ，速度，加速度に対応する．しかし実はそれらの値はわからない．というか，宇宙は無限に広がっていると考えられており，$R(t)$ およびそれらの微係数の値自身は定義できない（あるいは意味がない）と言うべきなのである[*1]．一方，それらを組み合わせて得られる

$$H_0 \equiv \frac{1}{R(t_0)} \left.\frac{dR}{dt}\right|_0, \qquad (2)$$

$$q_0 \equiv -\frac{1}{R(t_0)H_0^2} \left.\frac{d^2R}{dt^2}\right|_0 \qquad (3)$$

は観測可能量であり，それぞれハッブル定数，減速パラメータと呼ばれる重要な宇宙論パラメータとして知られている．

$R(t)$ の時間変化を支配するのはもちろん重力である．その1階微分に対応する H_0 が正の値をとることがすなわち宇宙が膨張していることに対応する．「なぜ現在の宇宙が収縮ではなく膨張しているか」という疑問に答えることは極めて難しいが，これは初期条件に帰着すべき問題で，重力が働いていようと膨張していること自体は不思議ではない．一方，2階微分に対応する q_0 については事情が異なる．宇宙膨張の加速度は，通常の重力を考える限り初期条件には無関係に負の値をとるはずだ．だからこそ，q_0 は加速度にマイナスをつけて定義され，わざわざ「減速」パラメータと呼ばれているわけである．このことからも，q_0 が負の値をとるとは全く予想されていなかったことがわかる．にも関わらず最近の観測は，

$$q_0 \approx -0.6 \qquad (4)$$

という負の値を示唆している．負の加速度として定義された減速パラメータが負の値をとっているから宇宙は実は加速している，という何だかややこしい事態になってしまっているわけである．そのせいもあり，現在では減速パラメータという量は文献ではほとんど使われていない．

ところで，一般相対論・宇宙論の碩学である佐藤文隆氏は「宇宙はビッグバンで始まったなどという知識は二束三文の値打ちもない．値打ちがあるのは何故そう考えられるか，である．」という実にもっともな主張を繰り返されている[2]．そこで以下では，宇宙が加速膨張をしていると考えられるのは何故か，さらに加速膨張の原因は何か，という「論理展開の追体験」[2]を通じて宇宙論における重力の役割を考え直してみたい．

---

*1） これが正確ではないと断ってから始めた理由であるが，一般相対論を用いればこの $R(t)$ は宇宙のスケール因子に対応し，定数倍の自由度を除いて明確に定義される量となる．

2. 宇宙の加速膨張の発見

そもそも宇宙膨張は，遠方銀河までの距離 d とその銀河と我々との相対速度 v が比例関係：

$$v = H_0 d \tag{5}$$

にあるという観測事実（ハッブルの法則）から導かれた．ここでいう「相対速度」とは，銀河の吸収線の波長のずれをドップラー効果：

$$\lambda_{\text{観測者}} = \lambda_{\text{実験室系}}(1 + v/c) \tag{6}$$

によって解釈して読み替えたものに他ならない．その意味では，より本質的な観測量は赤方偏移と呼ばれる無次元パラメータ：

$$z \equiv \frac{\lambda_{\text{観測者}} - \lambda_{\text{実験室系}}}{\lambda_{\text{実験室系}}} \tag{7}$$

である．「赤方」というすでに偏見の入りこんだ名前になっているのは，遠方天体の波長が常に伸びる（赤くなる）方向に偏移しているからであり，まさに宇宙が全体として膨張している事実に対応している*2)．

(5) 式を説明するとき必ず付け加えられるコメントに，「仮に宇宙が一点から誕生していたとすれば，$d/v = H_0^{-1}$ が現在の宇宙年齢となる」というものがある．ハッブル定数 H_0 の推定値[3]：

$$H_0 = 72 \pm 5 \text{ km s Mpc}^{-1} \tag{8}$$

からその逆数を計算してみると

$$H_0^{-1} = 136^{+10}_{-9}\text{億年} \tag{9}$$

となり，独立な方法から導かれた宇宙年齢[3]：

$$t_0 = 137 \pm 2\ \text{億年} \tag{10}$$

と素晴しい一致を示す．

しかしこの結果はあまりにでき過ぎなのだ．H_0^{-1} と t_0 が一致するのは，v が一定で時間変化しない場合でしかなさそうだ．例えば，地球からおもいっきりボールを投げ出して別の天体に到達させる（というあり得ない）場合を考えてみよう．ボールの速度は地球から遠ざかるにつれて徐々に減速するはずなので，相手側に到達したときの速度だけを用いて地球からその天体までボールが旅した時間を推定すれば甚大な過大評価となるに決まっている．同じ理由で，$t_0 < H_0^{-1}$ となるはずである．実際，もっとも単純な宇宙モデルであるアインシュタイン–ド・ジッターモデル*3)では $t_0 = (2/3)H_0^{-1} \approx 91$ 億年 となることが示される．

とすれば，(9) 式と (10) 式の値の一致はどう解釈すべきであろうか．考えられるのは，

(A) 宇宙の密度が極めて小さく重力はほとんど無視できる．そのため宇宙膨張は実質的に等速と近似してよい．

(B) 宇宙はある時期までは重力によって減速膨張をしていたが，その後なぜか加速膨張に転じて，v の変化が偶然相殺された．

という 2 つの可能性である．(A) の考え方は現在の宇宙について成り立っているとしても，時間を遡ると宇宙の密度はどんどん高くなる．この密度の時間変化まで考慮すると，完全に空虚な宇宙でない限り実現されない．とすれば残る可能性は (B) で，不自然さは否めないものの現在の標準的な解釈となっている．

宇宙の加速膨張の必然性は本質的に上述の説明で尽きているが，これはあくまで後付けの要約でしかない．歴史的に加速膨張という事実を明確にしたのは 1998 年の Ia 型超新星の観測結果で，冒頭で紹介したブレイクスルーである．これは (5) 式で表される近傍宇宙におけるハッブルの法則をより遠方まで拡張したものと考えてよい．超新星は星の進化の最終段階での爆発現象であり，そのスペクトルの性質から，Ia, Ib, Ic, II 型に分類される．特に Ia 型超新星は連星系中の白色矮星が起こすものと考えられており，明るさが最大となるときの絶対光度がほぼ一定で約 1 カ月もの長期間にわたりその母銀河と匹敵するほどの明るさを示す．したがって，極めて遠方にある母銀河の距離を決定するための標準光源として有用である．図 1 は，超新星レガシーサーベイと呼ばれる 5 年プロジェクトの初年度のデータをまとめたものである[4]．この間に観測された 71 個の Ia 型超新星の距離指標（みかけの等級 m と絶対等級 M の差で，その天体までの距離に対応．遠いほど値が大きくなる）とその母銀河の赤方偏移（値が大きいほど遠方，すなわち過去に対応する）がある関係に従っていることが見てとれる．次節で詳しく説明するが，そこに描かれている 4 本の理論予想のうち，一番下のカーブが上述のアインシュタイン–ド・ジッターモデル（減速膨張）で，これとは完全にかけ離れ

*2) 我々の宇宙が収縮していたならば，(7) 式はマイナスをつけて定義された上で，青方偏移と呼ばれていたことであろう．

*3) 4 節でいう $\Omega_m = 1$ かつ $\Omega_\Lambda = 0$ の場合に対応．

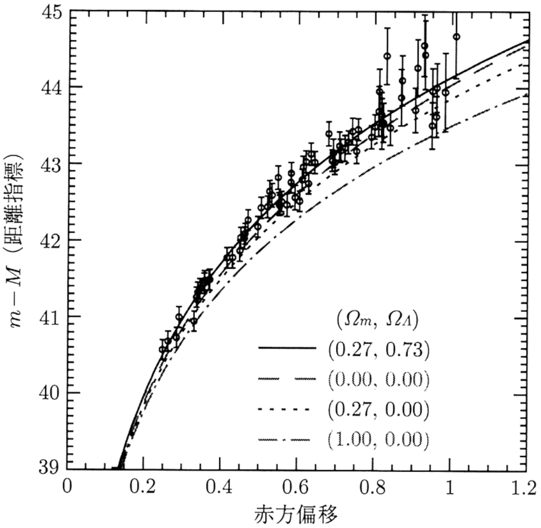


図 1　超新星レガシーサーベイに基づく赤方偏移—距離指標関係[4]．

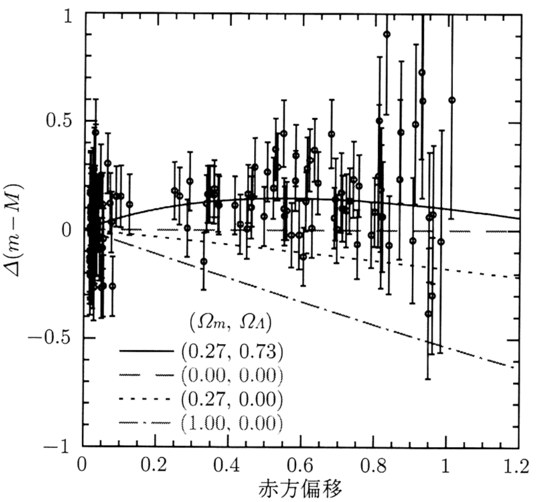


図 2　超新星レガシーサーベイに基づく赤方偏移—距離指標関係．図 1 を等速膨張の場合に $\Delta(m-M)=0$ となるように縦軸を変換したもの．

ている．一方，上から 2 番目のカーブは宇宙に物質が存在しない（したがって加速も減速もしない）場合で，実はデータはその結果にかなり近い．しかし，さらに精密な比較のために 2 番目のカーブとの残差をプロットしてみると，それに比べてデータは若干上側にあることがわかる（図 2）．つまり，遠方の超新星は 2 番目の曲線に対応する空っぽの宇宙モデルの予想よりも少しだけ暗い．これは，等速膨張をする場合よりも宇宙のサイズが大きいことを示唆しており，加速膨張を経験していることが結論されるわけだ．

3. 加速膨張の解釈 I：宇宙定数

この加速膨張を生み出す原因はどう解釈すればよいのだろうか？ もっとも単純なのは，膨張を減速させる重力＝万有引力に対抗して，加速させる「万有斥力」を持ち込むことである．もちろんこのままではいかにも「紙一重」の危ない話になりかねない．しかし驚くべきことに，一般相対論はこの万有斥力に対応する項の自由度を内在している．詳しいことは他の本[5]でも読んでもらうことにして，宇宙のスケール因子 $R(t)$ の運動方程式を書き下すと

$$\frac{d^2R}{dt^2} = -\frac{G}{R^2}\frac{4\pi R^3}{3}\left(\rho + 3p - \frac{\Lambda}{4\pi G}\right) \qquad (11)$$

となる．右辺の括弧第一項だけを見れば，一様密度 ρ を持つ球の半径 R で受けるニュートンの逆二乗則そのものとなっている．一般相対論的効果は，圧力 p もまた重力の源となること（第二項），さらに「宇宙定数」Λ が正の値をとる場合には実効的に負の重力＝万有斥力として寄与すること（第三項）の 2 点である．アインシュタインはこの Λ の自由度を用いて，膨張も収縮もしない静的宇宙モデルを構築しようとした（1917 年）．この考え自体は全くの失敗であったと言えるのだが，何と 80 年後に宇宙の加速膨張の担い手として表舞台にカムバックしたわけだ．宇宙が圧力の無視できる（非相対論的）物質で満たされている場合には，(11) 式を

$$\frac{1}{RH_0^2}\frac{d^2R}{dt^2} = -\frac{\Omega_m}{2}(1+z)^3 + \Omega_\Lambda \qquad (12)$$

と書き直すことができる．ここで，

$$\Omega_m \equiv \frac{8\pi G\rho(t_0)}{3H_0^2}, \quad \Omega_\Lambda \equiv \frac{\Lambda}{3H_0^2} \qquad (13)$$

は，現在の宇宙における（非相対論的）物質密度と宇宙定数をそれぞれ無次元化したパラメータである．

(12) 式の意味は直感的には明らかである．普通の物質に対応する Ω_m の寄与は重力として宇宙膨張を減速させる．過去（z が大きくなる方向）の宇宙はより高密度であるから，現在に比べて Ω_m が $(1+z)^3$ 倍された効果となる．一方，宇宙定数は名前の通りその大きさは時間とともに変化せず，常に Ω_Λ だけの万有斥力を及ぼし宇宙膨張を加速させる．このように加速膨張を宇宙定数によって説明しようとする解釈が現在もっとも標準的である．この解釈に従って，超新星のデータや宇宙マイクロ波背景輻射データなどを組み合わせ

て推定された値は

$$\Omega_m = 0.27 \pm 0.04, \quad \Omega_\Lambda = 0.73 \pm 0.04 \quad (14)$$

となっている[3]．図 1 および図 2 に描き入れられている実線は，上記の値を採用した場合で，確かに一致は良い．

この解釈に従えば，(12) 式から加速膨張は

$$z < \left(\frac{2\Omega_\Lambda}{\Omega_m}\right)^{1/3} - 1 \quad (15)$$

の時期に限られ，過去では（$\Omega_m = 0.27$, $\Omega_\Lambda = 0.73$ の場合は $z > 0.75$）減速膨張であるはずだ．残念ながら今のところこのような赤方偏移の観測データは限られておりかつ精度もあまり良くない（図 1，2)．この領域の信頼性の高いデータの蓄積は宇宙定数による解釈のさらなる検証のために本質的である．

4. 加速膨張の解釈 II：未知の重力法則

加速膨張に対するもう一つの解釈は，宇宙論的な大スケールで一般相対論が厳密には成り立たないとするものである．(11) 式が端的に示しているように，一般相対論に基づく宇宙膨張は本質的にはニュートンの逆二乗則に従っている．図 3 は，ニュートンの逆二乗則からのずれを湯川項で代表した重力ポテンシャル：

$$V(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r}\left(1 + \alpha e^{-r/\lambda}\right) \quad (16)$$

を仮定した場合，ずれのスケール λ とその振幅 α に対する実験・観測データからの制限をまとめたものである．このように，ニュートンの逆二乗則は，太陽系のサイズである 40AU（$\approx 6 \times 10^{12}$m）辺りまでは高い精度で検証されているものの，宇宙膨張が重要となってくる 1 Mpc（$\approx 3 \times 10^{22}$m）以上のスケールでは直接検証されてはいない．とすれば，加速膨張とは宇宙論的スケールでの一般相対論の限界を示しているのかもしれない．

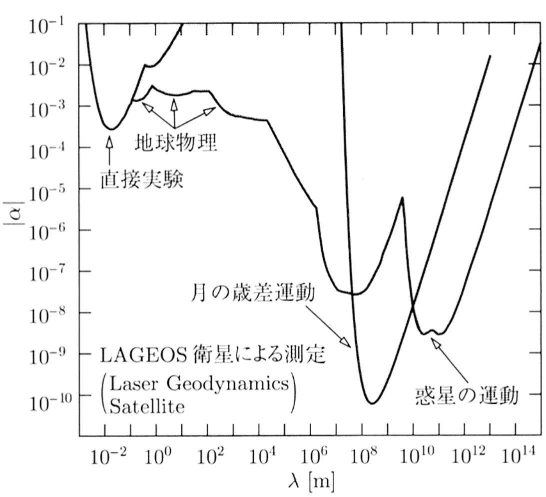


図 3　重力の逆二乗則からのずれに対する制限 (95%信頼度)[7]．

この考え方はかなり大胆なものではあるが，そもそも一般相対論は古典論であり量子論的な補正は必然であること（ただしこれはミクロなスケールの話である)，さらに最近の高次元宇宙モデルの可能性などを考慮すれば，ただちに否定できるようなものではない．というか，宇宙定数が実在するという考え方もそれと同等以上に大胆なものであることは認識しておくべきである．

高次元宇宙モデルにおいて宇宙膨張の運動方程式が変更される可能性に関しては，すでに数多くの研究[8]がなされているが，いまだ確立した理論モデルがあると言える状況にはない．そこで我々は，宇宙膨張は (12) 式に従いつつ，物質間の重力ポテンシャルは (16) 式を少し修正した

$$V(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r}\left[1 + \alpha(1 - e^{-r/\lambda})\right] \quad (17)$$

で与えられるものと仮定した．(16) 式は λ として図 3 の横軸にあるような小さなスケールを念頭においており，太陽系の大きさ以上のスケール（$r \gg \lambda$）では通常の重力の逆二乗則に漸近する．一方 (17) 式の λ は Mpc を超える宇宙論的なスケールを想定したもので，小スケール（$r \ll \lambda$）で通常の逆二乗則を再現する一方，$r \gg \lambda$ では G が実効的に $G(1+\alpha)$ となる．(12) 式と (17) 式は整合性に欠けるように思われるかもしれないが，宇宙膨張が (14) 式の値を持つモデルで近似的に良く表されることを考慮すれば，観測されている膨張則を境界条件として手で与えた上で，宇宙論スケールでの逆二乗則を検証しようという立場であると言える．その上で，スローンデジタルスカイサーベイで得られた銀河の空間分布の非一様性から α と λ を制限した結果が図 4 である[9]．図 4 に示されている α に対する制限は，図 3 と比較するとまだまだ弱い．これは，今後さらに詳細な考察によってより厳しい制限を導くことの重要性に加えて，加速膨張を未知の重力法則によって解釈する可能性をも示唆していると考えることもできる．

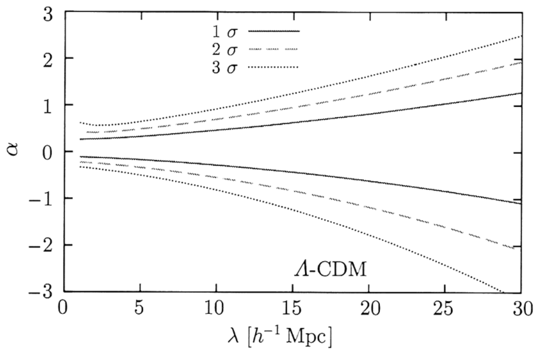


図 4　スローンデジタルスカイサーベイ銀河分布からの宇宙論スケールにおける重力の逆二乗則からのずれに対する制限[9]．この曲線の外側が観測と矛盾する領域．

5. 暗黒物質，宇宙定数，そして暗黒エネルギー

20 世紀後半の観測的宇宙論は，宇宙を満たす新たな成分の発見の歴史であった．1970 年代には宇宙の物質のかなりの割合が光っていないことが認識されていたが，それらは何らかの理由で輝いていないバリオンであろうと考えられていた．1980 年代に入ると，まず質量を持つニュートリノがこの暗黒物質の最有力候補であると考えられたが，それはすぐに冷たい暗黒物質にとって代わられた．そして 1990 年後半には，現在の宇宙は暗黒物質ではなく宇宙定数によって支配されているとする解釈が主流になって来た．この宇宙定数という仮定は，現在のところ観測事実とは何ら矛盾しない．というよりも，不思議なほどうまく合う，と形容すべきかもしれない．にも関わらず，何か不自然な感が残るのもまた事実である．その不信感はいろいろな形で表現できるが，もっとも単純には「なぜ今？」という疑問に集約されよう．

宇宙定数はその名前の通り，値が時間的に変化しない．一方，他の物質密度は宇宙膨張に伴って単調に減少する．両者が全く独立なものであるとすれば，それらが「現在」一致するべき特別な理由は思い当たらない．もう少し具体的に述べてみよう．(12)–(14) 式を組み合わせると，赤方偏移 z に対応する時期での物質密度と宇宙定数密度の値は以下のようになる．

$$\rho_m(z) \equiv \frac{3H_0^2\Omega_m}{8\pi G}(1+z)^3 \approx 2.6\times10^{-30}(1+z)^3\,\mathrm{g\,cm^{-3}}, \qquad (18)$$

$$\rho_\Lambda(z) \equiv \frac{3H_0^2\Omega_\Lambda}{8\pi G} \approx 7.1\times10^{-30}\,\mathrm{g\,cm^{-3}}. \qquad (19)$$

宇宙が中性化した $z\approx10^3$ ($t\approx$38 万年)，元素が誕生した $z\approx3\times10^8$ ($t\approx$3 分)，電弱相互作用の統一エネルギースケール $z\approx3\times10^{14}$ ($T\approx100\,\mathrm{GeV}$, $t\approx10^{-11}$ 秒）において，これらの比はそれぞれ $\rho_m/\rho_\Lambda\approx10^9$, 3×10^{25}, 3×10^{43} となる．宇宙定数の値がいつ決定されたのかはわからないが上述の時期以前であろうから，当時の物質密度に比べて何十桁も小さな（当時としては）不自然な値をもって誕生したことになる．その時点ですでに，$\rho_m\approx\rho_\Lambda$ となるという意味で現在（$t\approx100$ 億年，$z\approx0$）を特徴的な時間スケールとして知っていたわけだ．宇宙が誕生して 10^{-10} 秒も経過しないうちに，100 億年後には宇宙の減速膨張が加速膨張に転じひょっとしたら全宇宙で唯一の存在かもしれない我が地球上の人類が「なぜ宇宙は加速膨張しているのだろうか」などと思い悩むことまで運命づけられていたとも言える．これらは単なる偶然として素直に受け入れるしかないのだろうか？

まあこれにはいろいろな立場があり得る．最終的には科学的議論と言うよりも個人の価値観の違いに帰着する問題かもしれない*4)．ここではそれらの中で実はもっとも「穏健な」暗黒エネルギーというパラメータ化についてのみ紹介しておこう．

再度 (11) 式を眺めてみる．実はこの右辺の宇宙定数 Λ は，本来の一般相対論的思想から言えば左辺におくべきだった[5]．この式の元となるアインシュタイン方程式は，左辺が時空の幾何学に対応し右辺がそれを規定する物質場に対応する，という構造を持つ．宇宙定数は本来宇宙に実在する物質の一形態としてではなく，時空の幾何学的性質の持つ自由度として存在を保証されていたに過ぎない．しかしながら，現在では (11) 式のように宇宙定数を右辺に移行し，物質場として解釈するほうが普通である．この解釈の下では，(11) 式はむしろ

$$\frac{d^2R}{dt^2} = -\frac{4\pi GR}{3}\left[\rho+\rho_\Lambda+3(p+p_\Lambda)\right], \qquad (20)$$

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G}, \quad p_\Lambda = -\frac{\Lambda}{8\pi G} \qquad (21)$$

と書いたほうがすっきりする．宇宙定数はエネルギー密度 ρ_Λ と圧力 p_Λ を持つ物質場に他ならないこと，ただしその場合，圧力が負になることが明確になる．こ

*4)　これに関してはいわゆる人間原理を初めいろいろと面白い話があるのだが，今回の記事の本筋を逸脱し過ぎるのでまた別の機会に論じることにする．

こまでくれば宇宙定数が極めて特殊な例にしか過ぎないことが認識されてくる．当然，

$$\frac{d^2R}{dt^2} = -\frac{4\pi GR}{3}\left[\rho + \rho_X + 3(p + p_X)\right] \quad (22)$$

と書き，状態方程式

$$p_X = w\rho_X \quad (23)$$

に従う「暗黒エネルギー」へ一般化して考えたくなるはずだ．この文脈では宇宙定数は $w = -1$ というある特別な例にしか過ぎない．しかしながら，本来アインシュタイン方程式の左辺に導入された宇宙定数には，(23) 式のような自由度は許されず，その意味でも観測的に $w = -1$ かどうかを突き詰めることは重要な意義を持つ．

これらを背景として超新星観測データをより詳細に検討してみよう．まず，$w = -1$ すなわち「暗黒エネルギー＝宇宙定数」という仮定の下に得られた制限を図 5 に示す．(15) 式からわかるように，$z = 0$ では，$2\Omega_\Lambda > \Omega_m$ が加速膨張に対応する．当然であるが超新星の観測はこの領域を示唆する．またこの図には SDSS 銀河の空間分布に存在するバリオン振動（Baryonic Acoustic Oscillation: BAO）という特徴的なパターンからの観測的制限の結果も合わせてプロットされている[6]．相対論的宇宙モデルでは，$\Omega_m + \Omega_\Lambda > 1$ が閉じた空間，$\Omega_m + \Omega_\Lambda < 1$ が開いた空間を持つ宇宙に対応し，その境である $\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$ は平坦な宇宙と呼ばれる．超新星とバリオン振動を組み合わせた結果は，平坦な宇宙を示唆しており，宇宙マイクロ波背景輻射などから得られる (14) 式の値と極めて良い一致を示していることも見てとれる．

では，宇宙定数をより一般化した暗黒エネルギーに対してはどのような制限が導かれるのだろうか．(23) 式で w が定数の場合には，暗黒エネルギー密度は $\rho_X \propto (1+z)^{3(w+1)}$ という時間依存性を持つことが示されるので，(12) 式は

$$\frac{1}{RH_0^2}\frac{d^2R}{dt^2} = -\frac{\Omega_m}{2}(1+z)^3 - \frac{(1+3w)\Omega_X}{2}(1+z)^{3(w+1)} \quad (24)$$

と一般化される．したがって加速膨張の条件は

$$\Omega_m + (1+3w)\Omega_X(1+z)^{3w} < 0 \quad (25)$$

である．平坦な宇宙（$\Omega_m + \Omega_X = 1$）を仮定したときの超新星およびバリオン振動データからの w への制限を図 6 に示す．この場合，$z = 0$ での加速膨張の条件である (25) 式は

$$w < -\frac{1}{3(1-\Omega_m)} \quad (26)$$

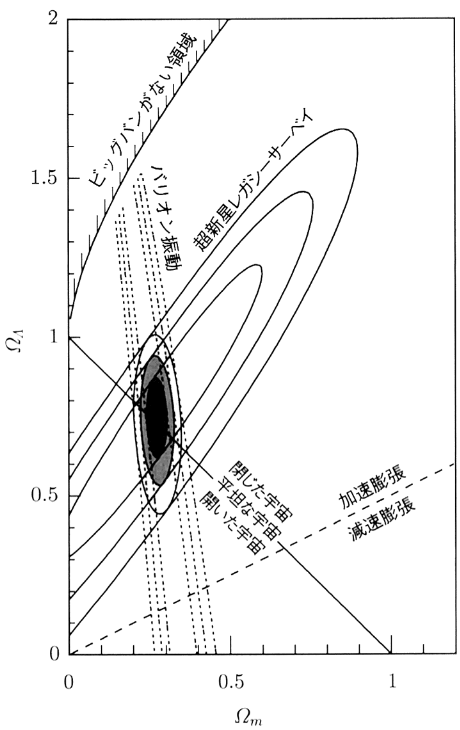


図 5　超新星レガシーサーベイ[4]と SDSS 銀河のバリオン振動解析（BAO）[6]から得られた Ω_m と Ω_Λ への制限．

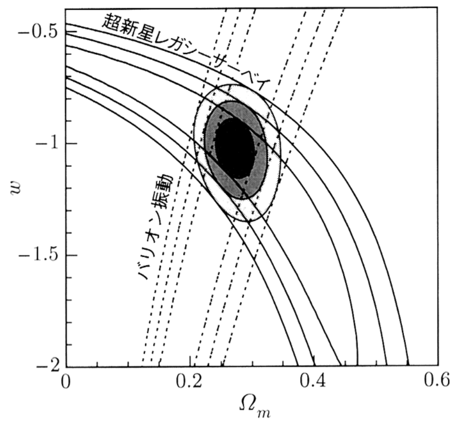


図 6　超新星レガシーサーベイ[4]と SDSS 銀河のバリオン振動解析（BAO）[6]から得られた Ω_m と暗黒エネルギーのパラメータ w への制限．

に帰着する．現時点での観測的制限を組み合わせると，

$$w = -1.023 \pm 0.090(\text{統計誤差}) \pm 0.054(\text{系統誤差}) \quad (27)$$

となり，暗黒エネルギーは実質的には宇宙定数に近いようだ．

6. 今後の展望

宇宙の加速膨張という事実自身は高い信頼性を持つと考えて間違いなかろう．しかしその原因に至っては，「暗黒エネルギー」という新たな宇宙の構成要素の実在，あるいは「宇宙論スケールにおける重力法則のずれ」という新たな物理法則の示唆，いずれをとっても正直なところにわかには信じられない．佐藤文隆氏流に表現するならば，「宇宙が暗黒エネルギーで満たされているなどという知識は二束三文の値打ちもない．値打ちがあるのは何故そう考えられるか」である．そのためにはさらに精密な宇宙論的観測をする以外には術がない．実際，暗黒エネルギー探査は次世代宇宙観測のキーワードとなっており，世界中で様々なプロジェクトが提案されている．日本のすばる望遠鏡でも，広視野撮像の Hyper-Suprime Cam 計画，さらには米国と共同で広視野多天体分光を行う WFMOS（Wide-Field Fiber-Fed Optical Multi-Object Spectrograph）計画など，暗黒エネルギーの性質を突き止めようとするプロジェクトが真剣に検討されつつある．宇宙の加速膨張の原因の解明が 21 世紀科学における重要な鍵を握ることは間違いない．

参考文献

1) James Glanz: *Science* **282**, 2156 (1998).
2) 佐藤文隆：『科学者の将来』（岩波書店，2001）.
3) D.N. Spergel et al.: *The Astrophysical Journal Supplement* **148**, 175 (2003).
4) P. Astier et al.: *Astronomy & Astrophysics* **447**, 31 (2006).
5) 須藤　靖：『一般相対論入門』（日本評論社，2005）.
6) D. Eisenstein et al.: *The Astrophysical Journal* **633**, 560 (2005).
7) E.G. Adelberger, B.R. Heckel & A.E. Nelson: *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **53**, 77 (2003).
8) G.R. Dvali, G. Gabadadze and M. Porrati: *Phys. Lett. B* **485**, 208 (2000).
9) A. Shirata et al.: *Phys. Rev. D*, **71**, 064030 (2005).

（すとう・やすし，東京大学大学院理学系研究科）

ブラックホールとクォーク・グルーオン・プラズマ

夏梅 誠

2005年5月，フロリダで開かれたアメリカ物理学会の会議で，ブルックヘブン国立研究所で行われていた実験結果が報告されました．この研究所には，相対論的重イオン衝突型加速器 RHIC（Relativistic Heavy Ion Collider）と呼ばれる加速器があり，金原子核のような重イオンを高エネルギーで衝突させる実験をしています．陽子や中性子は，クォークやグルーオンといったより基本的な粒子からできています．しかし，通常は陽子の中などに閉じ込められており，ばらばらに取り出すことはできません．しかし，高温・高密度ではクォークは自由になり，一種のプラズマになると期待されています（クォーク・グルーオン・プラズマ）．RHIC は，このプラズマを実現するための実験です[1]．

この報告では，興味深いことに超弦理論について触れられました：「超弦理論と RHIC 実験の間の予期せぬ関係には心が躍った」大きな実験の報告で，超弦理論が言及されたのはおそらく初めてではないでしょうか．そこで，ここではクォーク・グルーオン・プラズマと超弦理論の関係について書いてみたいと思います．

なお，ここでこの話を紹介したいのは，他にも訳があります．一つは，この話題が素粒子論のみならず，素粒子実験や原子核物理学，物性物理学など幅広い分野の方々に興味を持っていただけるかもしれないという点です．そして，もう一つは，超弦理論の近年の発展「AdS/CFT 対応」を学ぶ上で，この話題は教育的だと思っているからです．

1. 超弦理論の初歩

超弦理論での基本的な物体は，伸び縮みする極めて小さい長さのストリングです（図1）．このストリングは極めて小さく，10^{-34} メートル程度と考えられています．これに対して，現在実験で「見る」ことができる長さはせいぜい 10^{-17} メートル程度にすぎません．このため巨視的にはストリングは素粒子とみなせます．

しかし，どんなに小さくても，ストリングと粒子には決定的な違いがあります．それは「ストリングは振動できる」という点です．そしてこの点こそが，超弦理論の利点です．素粒子論では様々な素粒子が登場します．超弦理論では，これらの素粒子はすべてストリングという一つの物体で統一的に理解されます．ストリングはいろいろな形で振動できますが，様々な素粒子はストリングの様々な振動として解釈します．

具体的にストリングの振動の様子を見てみましょ

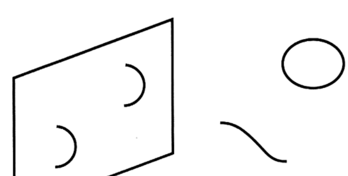


図1　超弦理論の主な登場人物．端のあるストリング（開弦）とループ状のストリング（閉弦）．開弦は，D ブレーンと呼ばれる物体上に端点を持つこともできる．

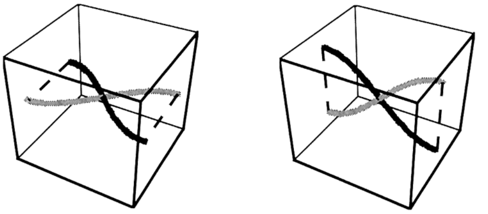


図 2　開弦のもっとも単純な振動．太線の開弦が半周期後にグレーの線の形を取る．「箱」は単に 3 次元での振動を見やすくするために描いたものである．

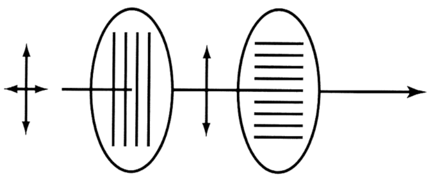


図 3　光に 2 つの状態があることは，偏光フィルターを 2 枚使って確かめることができる．

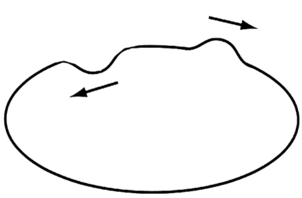


図 4　閉弦では，2 つの独立な進行波がある．これはグラビトンの持つスピン 2 の性質と一致する．

う．まず開弦の振動を考えてみます．図 2 は，開弦の一番単純な振動を描いたものです（4 次元時空の場合）．ストリングは振動していますが，振動する方向には 2 つあります．超弦理論ではこれは光子（ゲージ理論）を表します．光も 2 つの振動状態からできているからです．これは偏光フィルターを使えばわかります（図 3）．（偏光していない）光を一枚の偏光フィルターに通しても，光は完全には遮断されません．しかし，向きが 90° 違うフィルターを 2 枚使えば光は完全にブロックされます．2 つのフィルターでそれぞれの振動状態がブロックされるからです．

では，閉弦はどんな粒子を表しているのでしょう？ 進行波の進む方向には，時計回りと反時計回りの 2 通りがあります（図 4）．端がある場合，端でこの 2 つは混じり合ってしまいます．しかし，閉弦では端がないので，この 2 つは独立です．このため，例えば時計回りの波を上下方向に振動させて，反時計回りの波はそれとは違う方向に振動させることができます．つまり，閉弦は，同時に 2 つの方向に振動できます．

これは，ちょうど重力波の性質と一致します．重力波の「偏光」については，ややなじみが薄いかもしれませんが，重力波も同時に 2 つの方向に振動しており，この性質をスピン 2 と言います．（正しくは，グラビトンと，未発見のスカラー粒子，ディラトンとアクシオンを表します．光の場合，振動の可能性は 2 通りでした．今の場合は，それぞれの進行波が 2 通りの方向に振動できます．したがって，合計すると 4 通りの振動があります．グラビトンの自由度は 2 つなので，2 つのスカラー粒子と合わせ，粒子の描像でも合計して 4 つの自由度があることになります．）

さて，超弦理論には D ブレーンと呼ばれる物体が存在します．これは，端点が固定されているような開弦です．端点が固定されていてもこれは開弦なので，やはりゲージ理論を表します．ただ，ストリングは D ブレーンから遠くには行けないので，このゲージ理論は D ブレーン上にあることになります．

D ブレーンは，何枚か重なり合うこともあります．すると，開弦は D ブレーン上に端点を持ちますが，端点を別々の D ブレーン上に置くことができます．この新たな自由度は，この場合のゲージ理論が電磁場のような $U(1)$ ゲージ理論ではなく，$SU(N)$ ゲージ理論を表すことを意味します（図 5）．

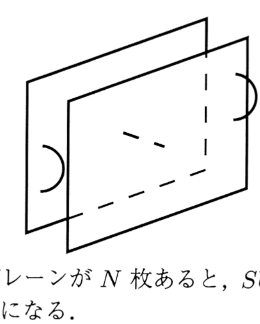


図 5　D ブレーンが N 枚あると，$SU(N)$ ゲージ理論になる．

2. D ブレーンとブラックホールの関係

一般相対論によると，いかなるエネルギーも時空を曲げる効果があります．D ブレーンがあると，時空はどうなるのでしょう？ 重力はニュートン・ポテンシャル

$$\phi_{ニュートン} \sim \frac{GM}{r} \tag{1}$$

で表されるので，重力の強さを GM で測ることができます．ニュートン定数 G と D ブレーンの質量 M は，超弦理論ではそれぞれ

$$G \sim g_s^2, \tag{2}$$

$$M \sim N/g_s \tag{3}$$

となります（g_s はストリング同士の相互作用の強さを表す結合定数，N はブレーンの枚数）．したがって，$GM \sim g_s N$ となります．このことから，結合定数が $g_s N \ll 1$ を満たすほど十分小さいとき，重力の効果は無視できます．D ブレーンは，無限に重いにも関わらず，時空を曲げることはないという結論になります．したがって，このとき D ブレーンはただのゲージ理論を使って表すことができます．

一方，$g_s N \gg 1$ のときは，D ブレーンは時空を大きく曲げ始め，しまいにはブラックホールになってしまいます．だから，このときは D ブレーンをブラックホールによって表すことができます．もっとも，ここでできるブラックホールは，ふつうのシュワルツシルド・ブラックホールではありません．D ブレーンは無限に広がっているので，この場合のブラックホールも無限に広がったものです．

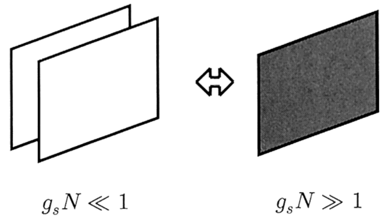


図 6　ゲージ理論は強結合で（無限に広がった）ブラックホールとして記述される．

つまり，相互作用の大きさによって，ゲージ理論とブラックホールを対応づけることができます（図 6）．ここでの議論をより正確にしたものは，「AdS/CFT 対応」として知られています[2]．

3. ゲージ理論プラズマの流体力学的記述

ブラックホールにモノを落としたと考えてみましょう．すると，しばらくの間，ブラックホールの形は不規則になりますが，最終的には元の対称的なブラックホールに戻ります．

このブラックホールの振舞いは，流体と似ています（図 7）．例えば，池にボールを落とすとさざ波が立ちますが，やがて止んで元の静かな水面に戻ります．流体の場合，これは粘性による散逸です．

そこで粘性について，簡単におさらいしておきましょう（図 8）．今 2 つの板の間に流体があるとして，上の板を動かします．すると，流体全体が引きずられ，下の板にも力がかかります．この力こそ粘性の効果です．今の場合，下の板にかかる単位面積あたりの力は，上の板を動かす速度に比例し，流体の厚みに反比例します：

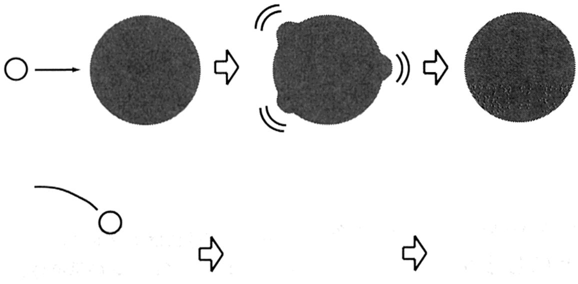


図 7　摂動を与えたとき，ブラックホールの振舞いは流体力学の振舞いとよく似ている．流体力学では，これは粘性の効果である．

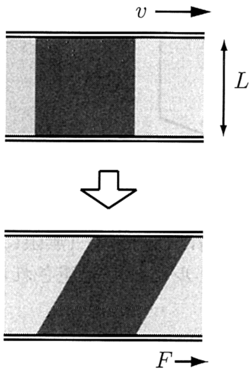


図 8　上の板を動かすと，粘性によって流体全体が引きずられる．このため下の板にも力がかかる．

$$\frac{F}{A} = \eta \frac{v}{L}. \tag{4}$$

比例係数 η を「ずり粘性率」と言います．

したがって，ブラックホールについても「粘性」という概念が考えられそうです．しかし，ブラックホールというのは時空そのものの性質のことで，実際には粘性など持たないはずです．一体，ここで言う粘性とは何のことでしょう？

2つの可能性があります（お互い相容れない解釈ではなくて，何らかの関係があるのかもしれません）．1つ目は「メンブレーン・パラダイム」を使ったものです．この考えによると，ブラックホールの地平面をあたかも物理的なメンブレーンのように扱うことができます．したがって，粘性をこのメンブレーンが持つ粘性と見ることができるでしょう．

2つ目の解釈は，近年の超弦理論の発展から生まれた解釈です．先に見たように，ゲージ理論とブラックホールには対応関係があります．だから，この粘性とは，対応するゲージ理論プラズマの粘性を測っている，と解釈することができます．したがって，この解釈によると，ブラックホールを使ってプラズマの粘性が計算できることになります．

では，具体的にどうやってプラズマの粘性が計算できるのでしょう．まず，大ざっぱな説明をしてその帰結について考えることにします．その後で，より詳しく説明することにします．

3.1 粘性率の導出（大ざっぱなもの）

流体力学では，散逸は粘性の効果です．一方，ブラックホールの立場では，散逸はブラックホールにエネルギーが吸い込まれることによって起こります．したがって，ブラックホールの場合，この散逸はブラックホールへの吸収断面積で表されるでしょう．（今，ブラックホールへ粒子が単位面積・単位時間あたり1個入射するとします．一般に断面積とは，この時間内に粒子が吸収されたり反応する確率のことです．）

この吸収断面積は，多くのブラックホールの場合で地平面の面積 A になります[*1]．したがって，

$$\eta \propto \sigma_{\mathrm{BH}}(\omega \to 0) = A \tag{5}$$

となるでしょう．ところで，地平面の面積と言えばブラックホールの分野では有名で，これはブラックホールの持つエントロピー S_{BH} を表しています[*2]：

$$S_{\mathrm{BH}} = \frac{A}{4G\hbar} k_{\mathrm{B}} \tag{6}$$

（k_{B} はボルツマン定数）．ということは，ずり粘性率をエントロピー[*3]で割ったものは，定数になります．定数部分は，後でする議論から決めることができて

$$\frac{\eta}{s} = \frac{\hbar}{4\pi k_{\mathrm{B}}} \tag{7}$$

となります．これは極めて低い値です．ちなみに，通常の条件下で，水はこの値の 3×10^3 倍ほどの η/s を持ちます．

注目すべき点は，ここで使った各種の関係（エントロピーと地平面の面積など）はかなり一般的に成り立つという点です．したがって，この結論も一般に成立する，ゲージ理論の詳細によらないと考えられます．

実際にブラックホールでずり粘性率を計算できるゲージ理論は，超対称ゲージ理論の場合です．

---

*1)　簡単な場合として，シュワルツシルド・ブラックホールに粒子を落とす場合もそうなります．正確には式にあるように，低エネルギー極限 $\omega \to 0$ の場合です．

*2)　本稿では，光速度 $c = 1$ の単位系を使います．

*3)　正確にはエントロピーではなく，エントロピー密度になります（ブレーンの単位体積あたりのエントロピー）．今考えているブラックホールは無限に広がっているので，地平面の面積（エントロピー）自体は無限です．吸収断面積で出てきた面積も，同様の意味です．

現実的なQCDではありません．なぜなら，QCDに対応するブラックホールがどのようなものかはまだわかっていないからです．しかし，上で見たように η/s の値が普遍的だとすると，超対称ゲージ理論による結果をただちにQCDにも適用できることになります．したがって，実験と比較することができます（図9）．結局，この主張をまとめると，

「ブラックホールと対応関係があるゲージ理論プラズマは，強結合で普遍的な小さいずり粘性率を持つ（ただしゼロ化学ポテンシャルの場合）*4)」

ということになります[3)]．

たしかにRHICによると，実験で極めて小さい粘性を持つプラズマができている可能性があります．そしてその値は，超弦理論からの値とよく一致しているようです．実験との比較という点で，ひとつ考慮に入れておきたいのは，RHICでプラズマができているとしても，その温度はせいぜいQCDスケールのオーダーです．この領域では，QCDはまだまだ強結合で自由ガスのようにはなっていません．したがって，強結合の結果を予言する超弦理論が注目されているわけです．

3.2 粘性率の導出（より正確なもの）

粘性と吸収断面積の関係を，もっと詳しく議論することにしましょう．そのためには，まずストリングの相互作用について考えておく必要があります．

閉弦は，端が切れて開弦になることができます．

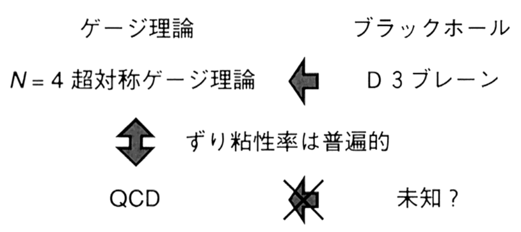


図9　Dブレーンで議論できるゲージ理論は，超対称ゲージ理論であり，現実的なものではない．しかし，ブラックホールの議論から，ずり粘性率は普遍的であると考えられるので，超対称ゲージ理論の結果が現実のゲージ理論でも成り立つと考えられる．

*4)　化学ポテンシャルがゼロの場合に制限されるのは，ここでは触れなかったややテクニカルな仮定のせいです．

重力（閉弦）はあらゆるエネルギーと結合し，もちろんゲージ場（開弦）とも相互作用するからです．Dブレーンの場合で考えると，Dブレーンにやってきたグラビトンがブレーン上でゲージ場に崩壊することを意味します（図10）．このようなグラビトンの崩壊確率，または相互作用の断面積 $\sigma_{\rm QFT}$ は，場の理論の公式を使って求めることができます：

$$\sigma_{\rm QFT} = \frac{8\pi G}{\hbar\omega}\int d^4x\, e^{i\omega t}\langle[T_{xy}(t,x), T_{xy}(0,0)]\rangle. \tag{8}$$

式の詳しい説明は省きますが，T_{xy} はゲージ理論のエネルギー運動量テンソルです．このテンソルが出てきたわけは，グラビトンが結合するのはこのテンソルだからです*5)．

一方，Dブレーンはブラックホールとしても記述することができました．この場合，グラビトンの崩壊とはブラックホールへの吸収断面積 $\sigma_{\rm BH}$ に他なりません（図10）．したがって

$$\sigma_{\rm BH} = \sigma_{\rm QFT} \tag{9}$$

となります．このことは，ブラックホールの物理量（左辺）とゲージ理論の物理量（右辺）が結びついたことを意味します．（ただし注意が必要です．ブラックホールは，ゲージ理論で言えば強結合に相当するので，この式(9)は強結合での関係式です．しかし，ゲージ理論ではふつう弱結合の場合しか計算できません．このため，この関係式を実際に証明することは困難です．特別な理論，$N=4$ 超対称ゲージ理論では（ゼロ温度の場合），この関係が成立していることがわかっています[4)]．これは超対称理論の「非くりこみ定理」によるものです．ここでは，この関係がゲージ理論の強結

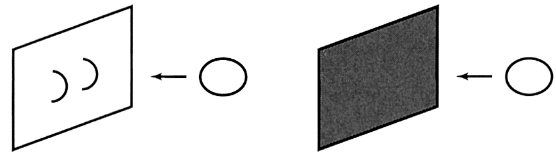


図10　場の理論の断面積（図左）とブラックホールの吸収断面積（図右）は一致する．

*5)　この式は「光学定理」の一種と見ることができます．

合で一般的に成立すると仮定します.）

ところで，ずり粘性率は久保公式から求められます．上の式は久保公式とそっくり同じ形をしています：

$$\eta = \lim_{\omega\to 0} \frac{1}{2\hbar\omega}\int d^4x\, e^{i\omega t}\langle [T_{xy}(t,x), T_{xy}(0,0)]\rangle. \tag{10}$$

このことから，ずり粘性率と吸収断面積の間に次のような関係が成り立つことになります：

$$\eta = \frac{\sigma_{\rm BH}(\omega\to 0)}{16\pi G}. \tag{11}$$

こうして，プラズマの量をすべてブラックホールの量で書くことができました．式 (5), (6) を使えば

$$\frac{\eta}{s} = \frac{\frac{A}{16\pi G}}{\frac{A}{4G\hbar}k_{\rm B}} = \frac{\hbar}{4\pi k_{\rm B}} \tag{12}$$

となり，先ほどの 式 (7) となります．

ここで考えたストリングの相互作用は，D ブレーンにやってきたグラビトンがブレーン上のゲージ場に崩壊するプロセスでした．これを一般的に「バルクの場のゆらぎが，境界の場のソースとなる」と言いかえることもできます*6)．この関係を推し進めたものは「GKP–Witten 関係式」として知られ，事実上 AdS/CFT 対応の定義となっています．

4. 粘性率限界

これまで考えてきたプラズマは，相対論的なプラズマでした．しかし，彼らは非相対論的な場合でも，流体のずり粘性率はつねに 式 (7) より大きいと予想しています．図 11 はいくつかの流体について，η/s を描いたものです．これからわかるように，これらの流体はたしかにこの限界を満たしているようです．

実際，このような制限の存在は簡単な議論からもわかります．ずり粘性率とエントロピー密度は，一般に次のようになります：

$$\eta \sim \rho\bar{v}l_{\rm mfp}, \quad s \sim \frac{\rho}{m}. \tag{13}$$

(ρ：質量密度，$\bar{v}$：流体を構成する粒子の平均速度，$l_{\rm mfp}$：平均自由行程，m：粒子の質量)．すると粘性率制限 $\eta/s > \hbar$ は，平均自由行程が粒子のド・ブローイ波長より長くなければいけないという制限です．ふつうの流体は粒子描像が成り立つので，たしかにこうなっているでしょう．

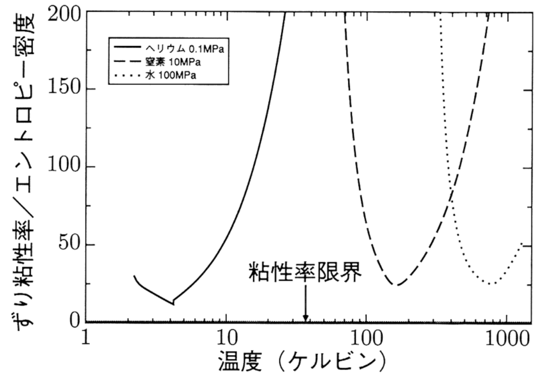


図 11　いくつかの流体についての η/s. $\hbar/(4\pi k_{\rm B})$ を 1 とした．文献 3) に基づく．

勘違いしやすいのが，ヘリウム 4 の場合です．ヘリウム 4 は超流動を起こし，その粘性はゼロと思っている人も多いかもしれません．しかし，二流体理論によると，ヘリウム 4 は常流体部分と超流体部分からできています．（超流体部分は凝縮を起こしていますが，常流体部分は温度によるゆらぎを表し，ふつうの擬粒子描像が成り立ちます．有限温度ではつねに常流体部分があります．）この常流体部分は有限の粘性を持ちます．このため，全体としてヘリウム 4 の粘性はゼロにはなりません．

とは言え，この限界の成立については，きちんとした物性物理学からの研究が望まれます．

5. 多くの課題

このようにゲージ理論の流体力学的記述は強力なものですが，多くの問題点もあります．とくに，ブラックホールとゲージ理論の関係 (9) は，特別な場合でしか確かめられていません．

実験の立場から言ってもっとも重大な制限は，この議論が化学ポテンシャルゼロの場合にしか使えないことです．現実の実験は原子核同士を衝突させるので，有限のバリオン数密度を持っています．化学ポテンシャルがある場合に，ずり粘性率

*6)　「バルク」とは時空全体のことで，D ブレーンが作る「境界」と対をなす言葉です．

がどうなるかはよくわかっていません．そもそも，今のような議論でバリオンをどう実現すればいいのかさえ，あまり有力な考えはありません．

とりあえず化学ポテンシャルを実現する一つの方法は，ブラックホールに電荷を与えることです．ブラックホールは，熱力学とそっくりな法則に従います．その第1法則は

$$dM = TdS_{\mathrm{BH}} + \Phi dQ \tag{14}$$

となります（T：ブラックホールの温度，Q：電荷，Φ：電磁場のポテンシャル）．この法則を見ると，電磁場がまさに化学ポテンシャルの働きをすることが読み取れます．

この場合の化学ポテンシャルは，現実的なものではありません．ゲージ理論の立場からすると，これは超対称電荷間を変換する $U(1)_R$ 電荷に相当します．しかしこの場合で，非閉じこめ相転移の様子を調べてみると，相図は QCD のものとよく似ていることがわかっています．ですから，このような場合を調べることで，現実的な有限密度の場合についても知見が得られる可能性があります．

このようなブラックホールについての η/s が，最近4つのグループによって独立に計算されました[5]．結果は，化学ポテンシャルがないときと同じ答え，$\eta/s = 1/(4\pi)$ となりました．したがって，式 (7) は化学ポテンシャルがあるときも成り立つ可能性が高くなっています．

本稿執筆にあたり，共同研究者の関西学院大学の岡村隆氏と神戸市立工業高等専門学校の前田健吾氏，ハドロン物理の立場から議論につき合っていただいた KEK の板倉数記氏，森松治氏に感謝します．以上の方々には原稿も読んでいただき，示唆に富むコメントをいただきました．

参考文献

1) RHIC 実験についての初等的な解説は，例えば M. ムカジー「ビッグバン直後を再現する」日経サイエンス 1999 年 6 月号；T. Schaefer, "The RHIC gold rush," Physics World 2003 年 6 月号；松井哲男「古くて新しい物質相—クォーク・グルオンプラズマ」数理科学 2001 年 3 月号；T. ラドラム，L. マクラレン「相対論的重イオン衝突加速器からなにを学んだか？」パリティ 2004 年 9 月号．

2) AdS/CFT 対応についての初等的な解説は，例えば J. マルダセナ「重力は幻なのか？」日経サイエンス 2006 年 2 月号；今村洋介「重力でゲージ理論を調べる」日本物理学会誌 2000 年 3 月号．より本格的なレビューは，O. Aharony, S.S. Gubser, J.M. Maldacena, H. Ooguri and Y. Oz, *Phys. Rept.* **323** (2000) 183 [arXiv:hep-th/9905111].

3) P. Kovtun, D.T. Son and A.O. Starinets, *Phys. Rev. Lett.* **94** (2005) 111601 [arXiv:hep-th/0405231].

4) I.R. Klebanov, *Nucl. Phys.* B **496** (1997) 231 [arXiv:hep-th/9702076].

5) J. Mas, arXiv:hep-th/0601144; D.T. Son and A.O. Starinets, arXiv:hep-th/0601157; O. Saremi, arXiv:hep-th/0601159; K. Maeda, M. Natsuume, and T. Okamura, arXiv:hep-th/0602010.

（なつうめ・まこと，高エネルギー加速器研究機構）

量子重力理論

笹倉　直樹

1. はじめに

時間と空間はこの世界で最も普遍的に存在するにも関わらず，我々は特にその存在を意識しない．通常の意識の上では，あくまで物質が主体であり，時間と空間は物質をあらしめるためだけに存在する空虚な枠にすぎない．しかし，重力の量子論を研究していくと，時間と空間は決して静的でも空虚でもなく，ふつふつと煮えたぎった水にも似た，不可思議な荒々しい実体と思えてくる．我々が通常，時空を実体がないかのように思っているのは，時空の持つ固有のスケール（プランク長 $\sim 10^{-33}\,\mathrm{cm}$）に比べて，我々があまりにも巨大で，非常に大まかにしか時空を捉えることができず，その存在を体感することができないからである．重力の量子論とは，このような不可思議な時空を物理的実体として考え，その量子論を記述する理論である．

では，時空の物理的実体とは何だろうか？ 残念ながら，現時点では，量子重力理論は完成からは程遠い夢の理論であり，時空の物理的実体についての特に有望と考えられる候補はない．その一方で，多くの研究者が，直接的または間接的に量子重力の研究に従事してきた．量子重力へのアプローチは研究者それぞれで，時空の数学的記述を仮定して演繹的に研究するものもいれば，大上段に立って新しい指導原理を唱えるものもいれば，思考実験より導かれる不等式を研究するものもいる．したがって，研究者が量子重力の解説記事を書けば，百人百様のものになるだろう．この解説記事は，あくまで私個人の研究軌跡に沿った些細なものであり，量子重力の研究は極めて多様な側面を持つものであることをまずここに断っておく．もっと詳しく知りたい読者は，挙げた参考文献等を参照されたい．

2. 重力の量子化の必要性

まず，なぜ重力の量子化が必要かを説明したい．これも研究者それぞれの意見があろうが，少なくとも2つの一般的な理由がある．

一つは，統一理論の観点からである．統一理論とは素粒子やそれらの相互作用が，ある単一の記述から自発的に派生して生じたとする理論で，例えば，ワインバーグ・サラム理論，大統一理論，弦理論がある．量子論は物理を記述する普遍的な理論であり，素粒子やそれらの間の3つの基本的相互作用（電磁気力，弱い力，強い力）は，場の量子論によって記述され，実験的にも確かめられている．特に上記の3つの基本的相互作用はゲージ場の量子論によって記述される．一方，重力を記述する一般相対性理論も，やはりゲージ場の理論の一種である．したがって，重力を含めた統一理論の構築のためには，一般相対性理論も量子化されなくてはならない．

もう一つの理由は，一般相対性理論の内包する限界から来るものである．これは，特異点定理と呼ばれ，エネルギー・運動量テンソルの局所的正定値性などの一般的な仮定の下で，重力崩壊や宇宙の時間発展の方程式の解が有限時間内に特異点を持つことをいうものである．このような特異点では一般相対性理論が破綻している．しかし，重力の量子論ではこのような破綻が生じないと期待されている．その理由は，一般に古典論は，量子論を古典近似することによって得られる近似的理論であるので，特異点が生じているところでは単に古典近似が悪いだけで，重力の量子論そのものの破綻を意味しないからである．

では，どのようなときに，古典近似は悪くなって量子論的取り扱いが必要になるのだろうか．一般相対性理

論が局所的な距離を決める計量場を力学変数とする理論であることを考えれば，何か長さの量が関係するであろう．重力定数 G, 光速 c, ディラック定数 $\hbar$ $(=h/2\pi$： h はプランク定数) を使って作ることのできる長さの量は，唯一プランク定数 $l_{\mathrm{P}}=(G\hbar/c^3)^{1/2}$ である．したがって，長さにしてプランク長 $l_{\mathrm{P}}\sim 10^{-33}\mathrm{cm}$, 時間にしてプランク時間 $l_{\mathrm{P}}/c\sim 10^{-43}\mathrm{sec}$ を境にして，重力の量子論が必要になると考えられる．特に，時間や長さが零である特異点は量子論的に扱われるべきである．

一般相対性理論の特異点は，物理的に非常に重要な点である．例えば，宇宙の時間発展における特異点は，宇宙の始まりまたは終わりの点であり，一体なぜどのように宇宙が存在することとなったのかやその消滅の可能性を考える上で量子重力は不可欠であることを示している．また，重力崩壊に関しても，ブラックホールの情報消失という物理屋を長年苦しませ続けている問題があるが，ブラックホールの時間発展における特異点の存在は，その問題を更にややこしくしている．これらの超難問に対して，量子重力は何らかの答えを与えてくれるのではないかと期待されている．

3. 一般相対性理論の摂動論的量子化の困難

一般相対性理論の力学変数は局所的距離を与える計量 $g_{\mu\nu}(x)$ である．この力学変数は時空上の各点 x に付随しているが，このような各点ごとの力学変数を持つ理論は場の理論と呼ばれる．場の理論の量子化の標準的方法として，摂動論的量子化の方法があるが，これは，自由場の量子論（場の相互作用のない理論の量子化）から出発して，相互作用を相互作用定数の次数ごとに取り入れていくという量子化の方法である．一般にこのような方法をとると，相互作用の各次数で発散が起こる．この発散は，時空座標 x が連続変数であるため，場の理論の力学的自由度が連続無限個存在することと関係している．発散が存在するままでは取り扱えないので，高周波数のモードを切り捨てる紫外切断パラメータ Λ を導入して力学的自由度の数が局所的に有限になるようにして計算を実行する．繰り込み可能な理論とは，相互作用定数などの有限個の理論のパラメータに適当な Λ 依存性を持たせることによって，連続無限極限 $\Lambda\to\infty$ において，観測量からこのような人為的な切断の影響を取り除くことができる理論のことである．特に，3 つの基本的相互作用（電磁気力，弱い力，強い力）を記述するゲージ場の量子論は繰り込み可能な理論である．

このような摂動論的量子化の手続きを一般相対性理論に適応しようとすると直ちに困難につきあたる．一般相対性理論のアインシュタイン・ヒルベルト作用は

$$S_{\mathrm{EH}}=\frac{1}{G}\int d^4x\sqrt{-g}R \tag{1}$$

であるが[*1)]，スカラー曲率 R は 2 階微分の項で長さ次元 -2 を持つので，重力定数 G の長さ次元は 2 である．このように相互作用定数が正の長さ次元を持つと，ある次数の摂動論的量子補正を計算したときに，例えば，

$$S_{div}=G^n\log\Lambda\int d^4x\sqrt{-g}R^{n+2} \tag{2}$$

のような形の，$\Lambda\to\infty$ で発散する，任意の次数の高階微分項が一般には現れ得ることが，次元解析から分かる．(1) と (2) は形が異なるので，(2) の発散を繰り込むためにはアインシュタイン・ヒルベルト項 (1) だけでは十分ではなく，元々の作用に無限個の高階微分項を付け加えなくてはならない．これは，無限個の相互作用定数の導入を意味し，理論が予言不可能な意味のないものとなってしまう[*2)]．

このように，一般相対性理論の摂動論的量子化においては，人為的に導入した紫外切断パラメータの依存性を取り除くことができない．このことはむしろ，量子重力には固有の切断パラメータのようなものが，もともと存在すべきであることを示していると解釈することもできる．実際，量子論と一般相対性理論に基づいた思考実験を考えると，プランク長 l_{P} やプランク時間 l_{P}/c よりも細かい精度で距離や時間を測定できないことを大まかに示すことができる．つまり，プランク長やプランク時間より短い距離や時間は意味がないのである．果たして時空間は，プランク長 l_{P} 程度の大きさを持つ最小単位のようなもので作られているのだろうか？ このような立場では，量子重力の解明とは，この世界の最小単位とも言うべきものの解明であり，必然的に統一理論と関係することになるのだろう．

---

*1) 簡単のため，$c=\hbar=1$ の単位系を使い，数係数等も無視した．

*2) この問題を回避するために，作用 (1) を変更して R^2 などの 4 階微分項を最初から含め，出発点とする自由場の理論に 4 階微分項も入れておけば，摂動論的に繰り込み可能にすることができる．しかし一般に，ユニタリティー（確率保存）が破れるという新たな困難が生じる．

4. 量子重力理論への非摂動論的方法

前節で述べたように，一般相対性理論の摂動論的量子化ができないので，非摂動論的量子化が考えられた．強い力を記述する量子色力学における非摂動論的方法として格子ゲージ理論があり，数値計算の強力な方法として盛んに行われている．その基本的考え方は，時空間を有限サイズの格子で近似して，力学的自由度を格子の上に乗せて有限系としての計算を行い，格子の大きさを無限に小さくする“連続極限”を最終的にとるというものである．一般相対性理論の格子理論化は，一般に Regge calculus と総称され，基本となる考え方は，格子ゲージ理論と同様に時空間を格子状のものとし，一般相対性理論の力学的自由度である長さを格子の各辺に与えるというものである．図 1 に見るように，四角形を貼り合わせて，各辺に長さの自由度を与えたものは，ある幾何学的多様体の近似と考えることができる．一般相対性理論での量子化とは，あらゆる幾何学的多様体についての振幅の足し上げであるので，対応する格子量子重力では，格子の各辺の長さや，格子のとり方についての足し上げとなる．ここで格子量子重力は主に 2 つの方法に大別される．一つは，同じ大きさの正多面体*3) を複数考え，それらを貼り合わせることにより幾何学的多様体を近似するというものである．この場合，正多面体の大きさは変化させずに，正多面体の貼り付け方が格子量子重力の力学変数となる．正多面体の大きさを無限に小さくする“連続極限”では，あらゆる幾何学的多様体の足し上げを行えると考える．この方法による量子重力理論は動的単体分割模型と呼ばれ，特に 2 次元では数値計算だけでなく，等価な行列模型として記述することによる解析的手段もあり，成功している．もう一つの方法は，時空を分割している格子のとり方は固定して，各辺の長さを力学変数とするものである．この方法での格子量子重力理論は 2 次元ではうまくいかないが，3 次元の場合には，量子重力が位相的理論であることを反映して成功している．この 3 次元格子量子重力理論については，次節以降で詳しく説明する．残念ながら，本当に知りたい 4 次元時空で有効な格子量子重力理論については，模型が幾つかあるものの，はっきりとしたことは分かっていない．

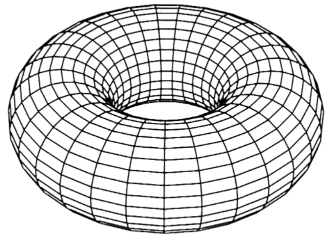


図 1　2 次元トーラスを四角形で格子化したもの．

5. 3 次元格子量子重力理論

5.1 位相的場の理論としての 3 次元量子重力

まず連続理論の立場から，3 次元時空における一般相対性理論をもう少しよく見てみよう．局所正規直行系の方法を使うことにして，力学変数を一般相対性理論の計量 $g_{\mu\nu}$ から，三脚場 e^a_μ とスピン接続 ω^{ab}_μ に変更する．三脚場と計量との関係は，η_{ab} を局所ローレンツ計量として，

$$g_{\mu\nu} = e^a_\mu e^b_\nu \eta_{ab} \tag{3}$$

で定義される．スピン接続は，捩率ゼロの条件

$$de^a - e_b \wedge \omega^{ab} = 0 \tag{4}$$

から e^a より求まり，曲率テンソルは

$$R^{ab} = d\omega^{ab} + \omega^{ac} \wedge {\omega_c}^b \tag{5}$$

で与えられる．ここで ω^{ab}, e^a は 1 次微分形式 $\omega^{ab} = \omega^{ab}_\mu dx^\mu$, $e^a = e^a_\mu dx^\mu$ である．アインシュタイン・ヒルベルト作用は，これらの新しい力学変数を使うと，

$$S_{\mathrm{EH}} = \int d^3x\sqrt{-g}R = \int \epsilon_{abc}\, e^a \wedge R^{bc} \tag{6}$$

と書き直せる*4)．面白いことに，(4) と (5) は，e^a と ω_{ab} を独立変数と見て作用 (6) から得られる運動方程式と同じであるので，三脚場とスピン接続による記述と計量による記述とは古典的には等価である．計量による記述は 2 階方式，三脚場とスピン接続による記述は 1 階方式とそれぞれ呼ばれている．1 階方式では，距離計量とスピン接続を結びつける捩率ゼロの条件 (4) は運動方程式としてしか実現されないので，一般に量子論的には 2 つの方式は異なるものである．しかし，1 階方式による量子重力理論も，運動方程式だけが重要である古典極限では一般相対性理論と等価であるので，1 階方式によるものを一般相対性理論の量子化と考えてもよい．

1 階方式による量子重力理論の良い点は，作用 (6) は多様体の距離計量に依存しておらず，位相的場の理論であるということである．位相的場の理論は量子化

*3)　2 次元では正三角形．3 次元では正四面体．他同様．

*4)　簡単のため，$G = 1$ とし数係数も無視した．

が易しいため，実際の系を近似する模型としてよく研究されている．更に，非斉次ローレンツ群 $ISO(2,1)$ の生成子 P_a, J_a を使って作用 (6) を書き換えると[*5)]，

$$S_{\mathrm{EH}} = \int \left\langle A, dA + \frac{2}{3} A \wedge A \right\rangle, \tag{7}$$

$$A = e_a P^a - \frac{1}{2} \epsilon_{abc} \omega^{bc} J^a \tag{8}$$

のように，Chern–Simons ゲージ理論の作用に書き直すことができる．Chern–Simons ゲージ理論の量子論は，物理的動機だけでなく，結び目理論などの数学的動機からも，その性質がよく研究されており，3 次元量子重力理論はこのようなよく研究されている対象に帰着される．

しかし，非斉次ローレンツ群 $ISO(2,1)$ のような不定計量を持つゲージ群のゲージ理論は量子化の方法がよく分かっていないため問題である．一方，同様な議論により空間 3 次元の量子重力を考えれば，非斉次回転群 $ISO(3)$ の Chern–Simons 理論になるため，この問題は回避されることになる．通常の場の量子論では，時間方向を空間方向に置き換える操作をウィック回転と呼び，場の量子論における有効な計算方法として確立している．しかし，量子重力理論の場合にこの操作がどのような意味を持つのかは不明である．あくまで最終的には $ISO(2,1)$ の場合を直接扱うべきであるのだが，上記の技術的理由により，以下では空間 3 次元の量子重力理論（$ISO(3)$）を考えることにする．空間 3 次元であっても，量子化によって生じる重力揺らぎの効果がどのようなものであるかの本質について，何らかの理解が得られることを期待しているのである．

5.2 ポンザノ・レッジェ模型——位相的格子理論

以上のように，空間 3 次元の量子重力理論が $ISO(3)$ Chern–Simons 理論で与えられることを見た．しかし一般に，場の量子論は連続無限個の自由度の系であるため，(7) のような作用を与えるだけでは定義が不十分で，その計算方法を明示しなければ意味がない．ここでは，$ISO(3)$ Chern–Simons ゲージ理論を非摂動的に定義する格子理論であるポンザノ・レッジェ模型を説明しよう．

3 次元空間として，四面体を貼り合わせて作られる 3 次元多様体 M を考える[*6)]．簡単のため，表面のない

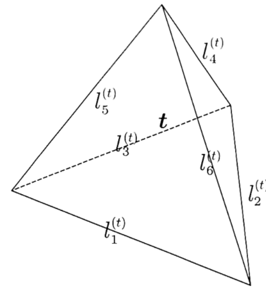


図 2　四面体と辺の長さ．

閉じた空間を考えることにする．力学的自由度は各辺の “長さ” l_i で，零以上の整数または半整数の値をとるものとする[*7)]．ポンザノ・レッジェ模型の分配関数は

$$Z(M) = \frac{1}{\Lambda^V} \sum_{\{l_i\}} \prod_{i \in L} (-1)^{2l_i} (2l_i + 1) \times \prod_{t \in T} (-1)^{\sum_j l_j^{(t)}} \begin{Bmatrix} l_1^{(t)} & l_2^{(t)} & l_3^{(t)} \\ l_4^{(t)} & l_5^{(t)} & l_6^{(t)} \end{Bmatrix} \tag{9}$$

で定義される．ここで，L は M 内のすべての辺の集合を表し，T はすべての四面体の集合を表す．$\{:::\}$ は，$SU(2)$ の $6j$-symbol で，各四面体の六辺の “長さ” を参照変数としている（図 2）．V は M 内の頂点の総数，Λ はある種の切断パラメータで，これについては後で説明する．

この模型の面白い点は，分配関数 (9) が M の位相的な性質にのみ依存していることである．例えば，3 次元球と位相的に同じ多様体を，四面体を貼り合わせて作る方法は無数にあるが，分配関数 (9) は 3 次元球ということにのみ依存し，四面体による構成法に依存しない．このような理論は，前節の位相的場の理論に対して，位相的格子理論と呼ばれる．すなわち，ポンザノ・レッジェ模型は位相的格子理論である．

ポンザノ・レッジェ模型が位相的であることは以下のようにして確かめられる．一般に位相的に同じ多様体を四面体で構成する方法は無数に存在する．しかし，実は幾つかの局所的な変換によって，それらはお互いに結ぶことができること（エルゴード性）が知られている．3 次元の場合には，図 3 の局所的変換を繰り返すことにより結ばれる．実際，分配関数 (9) がこれらの局所変換に対して不変になっていることを，$6j$-symbol の満たす恒等式を使うことで示すことができる．

これでポンザノ・レッジェ模型が位相的格子理論で

---

*5)　$ISO(2,1)$ の生成子の交換関係は $[J_a, J_b] = \epsilon_{abc} J^c$，$[J_a, P_b] = \epsilon_{abc} P^c$，$[P_a, P_b] = 0$ で与えられ，非縮退不変 2 次形式は $\langle J_a, P_b \rangle = \eta_{ab}$，$\langle P_a P_b \rangle = \langle J_a J_b \rangle = 0$ である．

*6)　数学的には PL 多様体と呼ばれるものを考えている．

*7)　長さを零以上の整数に限ることもできる．回転群として $SU(2)$ か $SO(3)$ を考えているかによる．

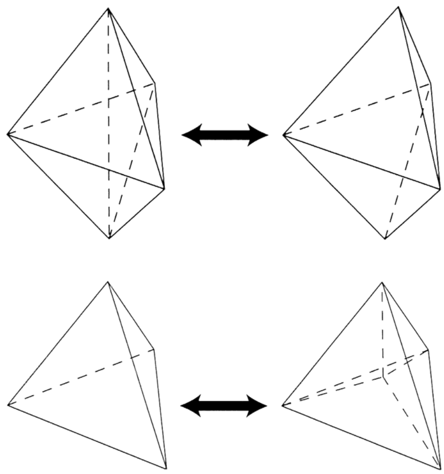


図 3　3 次元単体分割のエルゴード的局所変換．

あることが分かったが，$ISO(3)$ Chern–Simons 理論との対応はどのように示されるのだろうか？ ここでは詳しいことは省くが，ポンザノ・レッジェ模型において，物理的状態空間がどのようになっているかを議論することができる．そして，$ISO(3)$ Chern–Simons 理論の物理的状態空間と一対一に対応していることを示すことができる．

また別の物理的な理解として，粗雑ではあるが，直接的に一般相対性理論と関係づけることもできる．これまでは，四面体の内部について特に言及してこなかったが，平坦であると仮定しよう．すると，曲率などの空間的ゆがみは辺上に局在することになる．このような 3 次元空間に対して，作用 (6) は

$$S_{\mathrm{EH}} = \sum_{i\in L} \varepsilon_i l_i \tag{10}$$

と評価される．ここで，ε_i は辺 i の周りの欠損角と呼ばれるもので，

$$\varepsilon_i = 2\pi - \sum_{t\ni i} \theta_i^{(t)} \tag{11}$$

で定義され，$\theta_i^{(t)}$ は，辺 i を含む四面体 t の，辺 i における内角である（図 4）．空間が曲がっていない所では，ある辺を囲むすべての四面体の，その辺における内角の和は 2π であるが，曲がった所では 2π からずれ，ε_i が非零の値を持つことになる．Chern–Simons 理論として量子重力理論を考えるときには，多様体の局所的な向き（$\det(e)$ の符号）に制限はなく逆向きの四面体も同等に寄与するので，作用 (10) を考えたときの格子量子重力の分配関数は

$$\prod_{i\in L} (-1)^{2l_i} \prod_{t\in T} \cos\left(\sum_{i\in t} \theta_i^{(t)} l_i\right) \tag{12}$$

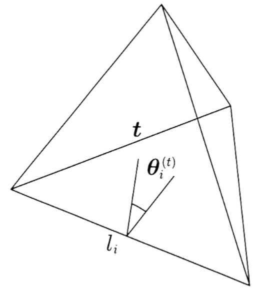


図 4　四面体の辺 i での内角．

のような形で与えられる．一方，$6j$-symbol はその参照変数が大きいとき，漸近的に

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{Bmatrix} \sim \frac{(-1)^{\sum_i j_i}}{\sqrt{12\pi V}} \cos\left(\sum_i j_i\theta_i + \frac{\pi}{4}\right) \tag{13}$$

と振る舞うことが知られている[*8)]．よって，(9) は (12) とほとんど等しく，一般相対性理論の格子理論化と直接関係していることが分かる．ただし，位相的な性質を持つためには，(12) では駄目で，(9) は，位相的という良い性質を持たせるために，(12) を少し変更したものと見ることができる．

最後に，(9) のパラメータ Λ について述べよう．実は Λ は発散量で，(9) の表式では，∞/∞ で有限量を得る必要があるため，定義に曖昧さが残っている．この問題を回避する方法は 2 通り知られている．一つは力学的自由度のゲージ固定をするもので，もう一つは $SU(2)$ の代わりに量子群 $SU(2)_q$ を考える Turaev–Viro 模型である[*9)]．両者とも位相的性質を持ち，前者が元と同じ $ISO(3)$ Chern–Simons 理論である一方で，後者は宇宙項のある 3 次元量子重力理論に対応する．宇宙項とは，一般相対性理論の作用で，

$$\lambda \int d^3x\sqrt{-g} \tag{14}$$

で与えられ，最近，宇宙背景放射の精密観測等からその存在がほぼ決定的となった項である．しかし，非常に小さな λ の観測値を説明する説得力ある理論が存在しないため，宇宙項問題と呼ばれ，解決すべき大きな課題となっている．ところで，Turaev–Viro 模型では，$q = e^{2\pi i/(k+2)}$ のとき[*10)]，辺の“長さ”が最大 $k/2$ までに限られ，有限力学的自由度の系となっている．

---

*8)　V は j_i を辺の長さとする四面体の体積．

*9)　分配関数は，量子変形された $6j$-symbol などを使って，(9) と同様な形で定義される．

*10)　k は自然数で，$k \to \infty$ が $ISO(3)$ の場合になる．

一方，この模型を調べると，宇宙項の値は $\lambda = \left(\frac{4\pi}{k}\right)^2$ で与えられることが分かるので，力学的自由度の数と宇宙項の大きさは反相関の関係にある．3 次元空間の理論であるので現実味は乏しいが，このような意外な関連は，宇宙項問題を考える上で一つの示唆を与えているのかもしれない．

6. 粒子との結合——非可換空間の出現

前節では重力だけの系を考えたが，ここでは，ポンザノ・レッジェ模型に粒子も導入する．粒子があるとその質量によって空間が曲げられるが，別の粒子がその曲げられた空間を通ることにより粒子間の相互作用が生じる．結果として，粒子の運動方程式が量子重力の効果により変更を受ける．これを見てやると，面白いことに，粒子は通常の空間を運動しているのではなく，非可換な空間を運動していることが導かれる．

粒子との結合を考えるために，粒子が辺の上を運動するように四面体分割を考えたとしよう．詳しいことはここでは省くが，粒子がある辺では，その辺の周りに $U(1)$ ホロノミーが生じる．この効果は分配関数 (9) において，その辺に対して，

$$(2j+1) \to \chi_j(h_\theta) \tag{15}$$

の置き換えになる．ここで，質量 m の粒子に対して，$\theta = \kappa m$ ($\kappa = 4\pi G$) で，$\chi_j(h_\theta)$ とは，基本表現での $SU(2)$ の元

$$h_\theta = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \tag{16}$$

の，スピン j 表現でのトレースである．この置き換えを適用することにより，粒子が存在する場合の分配関数を具体的に調べることができ，有効作用

$$\int d^3x \left(\partial_i\phi \star \partial_i\phi - \frac{\sin^2 m\kappa}{\kappa^2}\phi \star \phi + h\phi \star \phi \star \phi\right) \tag{17}$$

が得られる*11)．ここで，粒子の場 ϕ は

$$\phi(x) = \int_{SU(2)} dg\, e^{\frac{i}{2\kappa}\mathrm{Tr}(Xg)}\tilde{\phi}(g) \tag{18}$$

のように定義され，$X = x^i\sigma_i$（σ_i はパウリ行列）であり，"平面波" 間の積 $\star$ は，

$$e^{\frac{i}{2\kappa}\mathrm{Tr}(Xg_1)} \star e^{\frac{i}{2\kappa}\mathrm{Tr}(Xg_2)} = e^{\frac{i}{2\kappa}\mathrm{Tr}(Xg_1g_2)} \tag{19}$$

で定義される．(18) を見れば分かるように，通常の場の理論と異なる点は，運動量空間が $SU(2)$ の群空間に変更されていることで，このことが，積 (19) を通じて，非可換な空間を出現させている．

*11) 粒子間の直接相互作用が定数 h の 3 点の場合．

7. おわりに

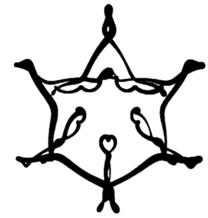
ここまで説明してきたように，2 次元や 3 次元空間の量子重力理論については比較的良く解析されているが，現実の 4 次元時空の量子重力についてはほとんど分かっていない．しかし，自由度の数と宇宙項との意外な関係や，粒子の場の有効理論に非可換空間が出現したという 3 次元空間での事実などは，4 次元時空でも何らかの形で成立する可能性もあり面白い．特に後者については，時空次元数などの詳細によらずに，量子重力を半古典的に取り扱うことによる思考実験に基づいて，時間や距離などの時空間的観測量に対する不確定性関係が導かれており，量子論的時空の出現が量子重力の非常に一般的な要請であることを示唆する．したがって，3 次元空間の場合のように，単に量子重力の有効理論として非可換空間が現れるというよりは，むしろ逆に，新たな量子論的時空概念に基づいて量子重力を構築するほうが自然のように思える．実際，量子化された時空間上での重力についての研究も行われてきている．将来，このような量子重力の新しい定式化によって，重力に対する現在の理解では全く謎である宇宙項問題などを，ごく自然に理解できるようになれば面白いだろう．

参考文献

1) 一般相対性理論については，R.M. Wald: *General Relativity*, Chicago Press, (1984).
2) 量子重力の非摂動論的アプローチについては，J. Ambjorn, B. Durhuus and T. Jonsson: Quantum geometry. A statistical field theory approach, Cambridge Monogr. *Math. Phys.* **1**, 1 (1997).
3) 3 次元量子重力から導かれる非可換場の理論については，L. Freidel and E.R. Livine: Ponzano-Regge model revisited. III: Feynman diagrams and effective field theory, arXiv:hep-th/0502106.
4) 時空間の不確定性については，L.J. Garay: Quantum gravity and minimum length, *Int. J. Mod. Phys.* A **10**, 145 (1995) と，Y.J. Ng: Quantum foam and quantum gravity phenomenology, *Lect. Notes Phys.* **669**, 321 (2005).
5) 非可換空間については，数理科学 2004 年 9 月号特集「可換から非可換へ」，サイエンス社．

（ささくら・なおき，京都大学基礎物理学研究所）

重力と行列模型



川合　光

1. はじめに

自然界には電気力，弱い力，強い力，重力という 4 つの基本的な力がある．このうちの重力以外の 3 つの力はゲージ場の量子論で完全に記述することができる．これは標準模型と呼ばれているが，今のところ実験とのずれはなく，理論的にも矛盾のない理論である．しかしながら重力という力が存在する以上，それも取り入れないと完全な理論にはなり得ない．よく言われているように，重力は素粒子の間の力としては他の力に比べて圧倒的に小さい．例として，2 つの陽子の間に働く重力と電気力を比べてみる．遠距離では，重力も電気力も逆二乗法則に従うので，力の大きさの比は距離によらない．万有引力定数と陽子の質量から重力を求め，真空の誘電率と陽子の電荷から電気力を求めてみると，重力は電気力よりおよそ 36 桁小さいことがわかる．普通もっとも精度のよい実験でも 10 桁くらいの精度だから，少数の素粒子間の相互作用を議論するときに重力が見えてくることはない．一方，われわれが日常的に感じている力は重力であり，電気力を感じることはあまりないが，それは，電気力は正電荷と負電荷で打ち消しあうのに対して，重力は決して打ち消しあわないためである．地球や人体は電気的にはほとんど中性になっているため，その間の電気力は結果として重力より小さいわけである．いずれにしても，重力はいろいろな場合に重要であり，標準模型で扱われている 3 つの力に加えて，重力も取り入れて初めて，自然界を表す完全な理論になり得るのである．

2. 標準模型と点粒子

2.1 紫外発散の問題

点状の粒子が相互作用していると紫外発散と呼ばれる問題が生じるが，標準模型の場合にはそれがくりこみという操作で解消できることが重要である．

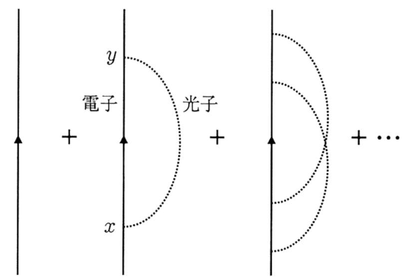


図 1　電子の伝播．

一般に量子力学では，ある状態から別の状態へ遷移する確率振幅は，仮想的に起こり得る中間の経路すべてについて確率振幅を足し上げることにより得られる．ここで，確率振幅とはその絶対値の 2 乗が確率を与えるような複素数である．例えば，電子の伝播という過程について，起こり得るすべての中間の経路を書いたものが図 1 である．この図で時間は下から上に向かって流れており，実線は電子を点線は光子を表している．

第 1 項は電子が単独で伝播するといういわば“裸の電子の伝播”を，第 2 項は電子が光子を 1 つ従えて伝播する過程を，第 3 項以下は電子が光子を 2 つ従えて伝播する過程等を表しており，実際の電子の伝播はこれらの確率振幅を足し合わせたものとして得られる．中間の経路すべてについて和をとるということから，例えば図 1 の第 2 項では，x と y について積分する必要がある．ところが，これを実際に評価してみると，x と y が時空で近距離にあるときの寄与から無限大が生じてしまうことがわかる．これはフーリエモードで見ると，波長の短いモードの寄与が発散しているということであり，紫外発散の問題と呼ばれている．

2.2 くりこみと点粒子の描像

紫外発散は点粒子の概念そのものの破綻を示してい

るように見える．図１の第１項は電子が点として伝播することを表しており，第２項以下はそれに対する量子補正である．そうすると，第２項が発散しているということは，第２項が第１項に比べて無限大であるということであり，それは電子が点として振る舞う相対確率がゼロであることを意味するからである．しかしながら，ゲージ理論を初めとするいわゆるくりこみ可能な理論においては，事態はそれほど悪くないことが知られている．すなわち，図１の第１項が表している“裸の電子の伝播”自身が元々有限ではなく，それが第２項以下から出てくる紫外発散をちょうどキャンセルしているとする．その結果，図１は全体として有限になっているというのである．このように，実際に起こる過程の確率振幅を有限にするように，基本的な裸の過程（素過程）の確率振幅を調節してやることをくりこみと呼んでいる．

このようなことができるのは，紫外発散の度合いが比較的小さいときに限られており，どんな場の理論に対してもできるわけではないが，ゲージ理論に対しては可能であることが知られている．例えば，量子電磁気学では，素過程，すなわち，電子の伝播，光子の伝播，電子による光子の放出・吸収，の３種の過程の確率振幅を調節することによって，実際に起こる過程の確率振幅をすべて有限にできることがわかっている．

3. 重力と点粒子の限界

3.1 重力のくりこみ不可能性とプランク長さ

結局，くりこみができるということは点粒子の描像がよかったということであり，この意味で，標準模型が表しているのは，点粒子が基本になっている世界である．ところが，重力を量子力学的に扱おうとすると，事態はまったく異なっている．すなわち，重力場では紫外発散の度合いが大きすぎて，素過程に対するくりこみの操作では有限な理論は作れないことがわかる．この事情をもう少し詳しく見るために，電子の伝播に対する重力の補正を考えてみよう．

例として，図１の第２項の光子を重力子に置き換えたものを考える．一見，大して変わらないように見えるが，実は大きな違いがある．すなわち，光子と電子の相互作用の大きさは電子の電荷に比例し，エネルギーに依存しないのに対し，重力子と電子の相互作用はエネルギーに比例して大きくなるのである．この違いはマクスウェル方程式とアインシュタイン方程式の形の違いに由来するものであるが，光子の交換によって生じるクーロン力が電荷の積に比例しているのに対して，重力子の交換によって生じる万有引力がエネルギーの積に比例していることからも理解できるだろう．(エネルギーを静止エネルギー，すなわち質量で置き換えた非相対論的極限がニュートンの式である．)

上で述べたように，紫外発散は x と y が近いところ，すなわち途中に飛んでいる電子や重力子の波長が短いところから生じるが，量子力学では運動量は波長に逆比例するから，短い波長のモードは大きなエネルギーを持っている．そうすると，短波長領域では電子と重力子の相互作用は電子と光子の場合よりも極端に大きなものとなり，重力子による紫外発散は光子の場合よりもずっと大きくなってしまうのである．そのため，重力子のからんだ紫外発散は素過程の大きさをどのように調節してもキャンセルすることができない，すなわち，重力はくりこみ不可能である．言い換えると，重力を量子論的に扱おうとすると，点粒子の描像は本質的に破綻するのである．

このように，ある程度よりも短い波長の領域では，もはや点粒子という描像が成り立たなくなるわけであるが，その特徴的な長さをプランク長さと呼んでいる．上で，２つの粒子の間の電気力と重力の大きさを比べたが，２つの粒子をコンプトン波長よりも近づけていくと，電気力に比べて重力はずっとはやく大きくなることがわかる．それは，電荷は粒子間の距離に依存しないのに対して，超相対論的な場合のエネルギーは運動量に比例し，それは量子論では距離に反比例して大きくなるからである．遠方では陽子間の重力は電気力よりも36桁小さいといったが，これは，粒子間の距離が陽子のコンプトン波長の $1/10^{18}$ 程度になると２つの力は同じくらいの大きさになり，それよりも近い距離では重力が支配的になるということを意味している．このように，重力が大きな力として支配的になる長さがプランク長さに他ならない．ちなみに陽子のコンプトン波長はおよそ 10^{-15} メートルであるから，プランク長さは 10^{-33} メートル程度である．

結局，プランク長さよりずっと長い距離では重力は他の３つの相互作用に比べて十分小さく，場の理論に基づいた標準模型によってうまく記述できる．この範囲ではクォーク，レプトン，ゲージ粒子などは点粒子であると思ってよい．しかし，プランク長さ程度の現象を考えると重力が本質的に重要となり，もはや点粒子のイメージは成り立たなくなってしまうのである．

3.2 大統一理論

ここまでは，電気力など標準模型に現れる3つの力の大きさは距離によって変化しないとしてきたが，実は近距離を見ていくとゆっくり変化することが知られている．例として電気力を考えてみよう．真空というのは古典論的には何もない状態のことであるが，量子論的に見るといろいろな粒子や反粒子が仮想的にできては消えるといったことを繰り返している複雑な系である．そこに電荷を持ってくると，ちょうど誘電体が分極して電荷を変化させるように，真空も分極を起こす．すなわち，実際に観測される電気力は分極によって弱められた後のものである．

2つの電荷の間の力を考えると，力を弱める効果があるのは電荷の間の領域における分極である．よって電荷間の距離を小さくしていくと，生の電荷が見えてくることになり，力は逆二乗則から予想されるよりも強くなっていく．計算してみると，この効果による補正は距離の対数に比例するようなものであることがわかる．すなわち，電荷間の力はおおまかには逆二乗則に従うが，その比例係数は実は一定ではなく，距離とともに対数的に変化するのである．ここでは電気力を考えたが，標準模型に基づいて計算すると，弱い力や強い力も同様に距離の対数に比例して変化することがわかる．その結果を見ると，プランク長さの100倍程度の距離で，標準模型の3つの力はほぼ同じ大きさになることがわかる．

これは，標準模型の背後にはもっと統一的なものがあり，それが長距離で近似的に標準模型に見えるのだということを示唆している．実際，ゲージ理論に基づいてそのようなモデルを作ることができる．長距離で近似的に標準模型になるという条件だけでモデルを完全に絞りこむことはできないが，そのようなモデルを総称して大統一理論（Grand Unified Theory）と呼ぶ．また，ここに現れたプランク長さの100倍程度の長さをGUTスケールと呼んでいる．また，標準模型の範囲内ではクォークとレプトンがなぜ対になっているのか説明できなかったが，大統一理論ではクォークとレプトンは自然に統一された形で現れる．これは，標準模型の背後にもっと基本的な理論があるはずであると考えるもう一つの根拠となっている．

プランク長さとGUTスケールをほとんど同じと見なすか，少し違っていると見なすかは人によって多少違うが，いずれにしても，プランク長さ程度の距離では4つの力はすべて同程度の大きさになり，しかも基本的なものはもはや点ではない．それでは，点に代わり，重力も含めたすべてのものを統一的に表すものとは一体何か，現在までに知られている唯一の可能性が弦理論なのである．

4. 弦理論

4.1 弦の摂動論

弦理論では，点粒子の代わりに1次元的に拡がったものを基本と考える．具体的には，開いた弦と呼ばれるウナギのように両端のある弦と，閉じた弦と呼ばれる輪ゴムのように端のない弦を考える．

初めに，摂動論に基づいて議論を進めよう．摂動論とは，確率振幅を求めるために，まず相互作用を無視して自由な運動を考え，次に相互作用の効果をべき級数として取り入れていく計算法のことである．点粒子の伝播をこのように摂動論で表したものが図1に他ならない．摂動論はこのように直感的に理解しやすいものであるが，本質的な欠陥を持っている．得られる級数（摂動級数）が収束級数になっておらず，漸近級数に過ぎないのである．そのため，摂動論は完全な理論にはなり得ず，局所的な基底状態からの小さなずれを解析するのには有用であるが，別の基底状態への遷移のように大きなずれを伴う現象の解析には無力である．実際，点粒子の場合は，格子ゲージ理論のように，場の量子論を構成的に定式化することによって初めて完全な理論が得られるのである．

以上の問題点を心に留めておいて，弦の摂動論を考えよう．ここでは，閉じた弦について議論する．閉じた弦が自由に運動すると，図2のように時空の中で世界面は円筒状になる．このような運動に対する確率振幅を求めるには，世界面の汎関数として作用 S を与えて，図2で実線あるいは点線で示されているように始状態と終状態をつなぐような，弦の仮想的な運動すべ

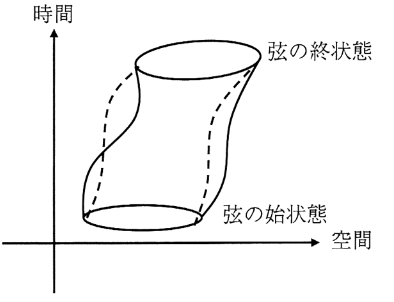


図2　閉じた弦の自由な運動.

てについて $\exp\left(\frac{i}{\hbar}S\right)$ を足し合わせてやればよい．作用は，粒子の場合には世界線の長さであるが，弦のときには世界面の面積をとればよい．これを南部–後藤の作用と呼んでいる．これをもう少し一般化して，世界面上にいろいろな自由度を導入することもできる．すなわち，世界面を形式的に 2 次元の時空と見なし，その上にいろいろな場が乗っているような状況を考えるのである．世界面を時間が一定の面で切ったときの切り口が弦であるから，これは弦に沿って伝播する場を導入するということである．

結局，弦の世界面の作用は

$$S = \frac{1}{l_S^2}(\text{世界長の面積}) + \text{他の自由度の寄与}$$

と書ける．ここで l_S^{-2} は弦の張力であり，長さの次元を持つ量 l_S はストリングスケールと呼ばれている．これは弦の長さのスケールを決めており，本質的には上記のプランクスケールと同じものである．他の自由度としてはいろいろなものを考えることができる．例えば，コンパクトされたスカラー場やフェルミオンの場，あるいはもっと一般の 2 次元の共形場を組み合わせたものをとってもよい．原理的にはこのように任意の自由度を持ち込んでもいいわけであるが，統一理論の見地からは臨界弦と呼ばれている特別な場合が重要である．臨界弦とは，世界面上で適度な自由度を持ち，その結果，世界面上で場所ごとに異なる倍率を持つスケール変換をしても不変であるような弦理論のことである．臨界弦の最も簡単な例が，時空が 10 次元で世界面上に 2 次元超重力の構造を持ったものである．世界面上にいろいろな自由度を導入することにより，時空が 10 次元以下の臨界弦がいくらでも構成できることが知られている．

4.2 弦の相互作用と有限性

弦理論が点粒子と大きく違っているところは，紫外発散の問題が初めからないところである．これを感覚的に理解するために場の理論の場合の相互作用と，弦理論の場合の相互作用を比べてみよう．図 3 の左の図は 2 つの粒子がぶつかって 1 つの粒子になる様子，例えば電子と陽電子が対消滅して光子になる過程が描かれている．点粒子がぶつかるのであるから，これは時空の一点で瞬時に起きる過程である．一方，弦理論でこれに対応する過程は図 3 の右の図のように 2 つの弦が合体して 1 つの弦になるという過程である．この場合 2 つの弦は滑らかに 1 つの弦につながっており，粒子の場合のような急激な変化ではない．

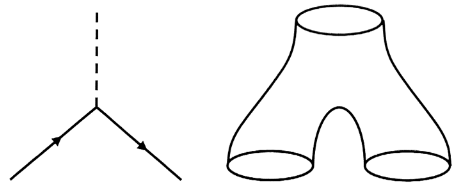


図 3　粒子の相互作用と弦の相互作用．

粒子の場合は相互作用が時空の 1 点で急激に起きるため，図 1 の第 2 項のように相互作用が短い時間の間に続けて起きるような過程を考えると，確率振幅が無限大になってしまう．それが紫外発散の問題であった．ところが弦理論では相互作用自身が滑らかであるため，図 1 の第 2 項と類似の過程，すなわち 1 つの弦がいったん 2 つの弦に分かれ，また合体して 1 つに戻るというような過程を考えても確率振幅は有限なのである．このように，弦理論には紫外発散の問題はなく，くりこみの操作も必要がないのである．

弦の相互作用について，もう一つ重要な点を指摘しておこう．図 3 からもわかるように，点粒子のときは伝播と相互作用は別のものとして導入されている．つまり，伝播してきた粒子が衝突して他の粒子に変化するのが相互作用であり，相互作用と伝播は質的に異なるものである．ところが，弦理論では，いったん世界面の作用を与えてしまうと，円筒状の世界面は伝播を記述し，図 3 右のような世界面は相互作用を記述するわけである．すなわち，弦理論は点粒子と違い，伝播の仕方が決まると相互作用の仕方も決まるという著しい性質を持っている．しかも，このようにして決まる相互作用を調べてみると，ゲージ対称性や一般座標変換に対する不変性など，場の理論では純然たる仮定であったものが，極めて自然に実現していることがわかる．

4.3 弦理論と重力

自由に伝播する弦を考えると，重心は等速直線運動をするが，重心の周りでぶわぶわと振動しながら回転している．重心系で見たときのエネルギーを光速の 2 乗で割ったものが静止質量だから，弦を遠くから眺めたとき，振動・回転のエネルギーが大きいものは重い粒子に見え，小さいものは軽い粒子に見えるわけである．量子力学では振動や回転のエネルギーは量子化されるから，質量も飛び飛びの値をとることになる．図 4 は，閉じた弦のとり得る質量と角運動量の関係をプロットしたものである．横軸が今考えている質量である．縦軸は重心の周りの角運動量をプランク定数を単位とし

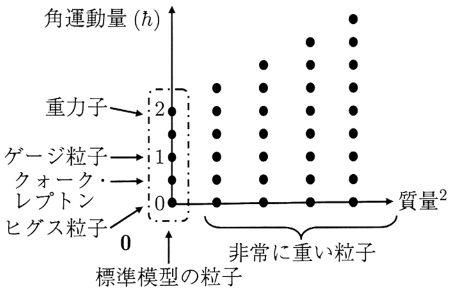


図4　閉じた弦の質量スペクトル.

て測ったものであり，弦を遠くから眺めて粒子と見たときのスピンの大きさである．

ここで，縦軸上の状態は質量がゼロの粒子を表しており，それ以外の状態は質量がプランクスケール程度の重い粒子を表す．弦の相互作用も考えると，質量がゼロの粒子のうち，スピンが2のものは重力子，1のものはゲージ粒子，1/2のものはクォーク・レプトン，0のものはヒグス粒子と見なせることがわかる．ここで重力子も現れていることは特に重要である．臨界弦の世界面上の対称性がスペクトルに重力子が現れることを保証しているのである．このように，弦理論では標準模型に現れるすべての粒子が1つの弦の異なる振動状態として記述でき，すべての力と物質がいとも簡単に統一されてしまうのである．

4.4 摂動論の限界と弦理論による統一の見通し

世界面上に自由度を導入することにより非常に多くの臨界弦が構成できるが，これらの弦理論はそれぞれが安定な真空の周りの弦の励起を記述していると考えられる．自由な伝播から始めて，相互作用の効果を少しずつ取り入れていくという摂動論の範囲では，これらの弦理論がお互いに移り変わることはない．しかしながら，上でも述べたように，弦理論においても摂動級数は収束する級数にはなっておらず，摂動級数では表せない効果（非摂動効果）が重要である．実際，場の理論におけるソリトンの類似物として弦理論には D–ブレーンというものが存在するが，それらを時空に凝縮させると，いくつかの理論が移り変わり得ることがわかっている．

現在の手法で完全に分析することはできないが，摂動論的に構成されるすべての弦理論は単一の理論の局所的な基底状態（真空）を記述しているだけであり，弦理論は本質的に一つのものであると予想されている．この意味で，摂動論に頼っている限り真空はどれも安定であり，なぜ自然が標準模型を選んでいるのかを説明することができない．本当の真空の構造を調べるためには，弦理論の摂動論によらない完全な定式化（構成的定式化）が必要がある．

構成的定式化できた暁にはどのようなことができるようになるのだろうか．楽観的な立場は，次のようなものである．非摂動効果まできちんと取り入れると，弦理論の真空はただ一つに決まるだろう．弦理論が正しければ，それは4次元の時空であり，そこに現れる軽い粒子は標準模型のものと一致しているはずである．すなわち，プランクスケール以外にはまったくパラメーターを持たない理論から，ある種の数値計算によって，時空の次元，ゲージ群の構造，世代数，結合定数の大きさといったすべてのことが説明できることになるだろう．この場合，計算によって得られたものが完全に実験結果と一致していれば，われわれは究極の理論を手にしたということだろう．もし，実験結果と合わなければ，理論を修正していく必要があるだろう．

これに対して悲観的な見方もある．たとえ非摂動効果を取り入れても真空はいくつもあり得るかもしれない．この場合は，自然が標準模型で記述されているのは，宇宙がたまたまそのような初期値をとったからだということになる．そうすると，たくさんある真空のうちでなぜそのような初期値をとったのか，という問題になる．これに対して，たくさんの真空の中にどれくらい標準模型に近いものがあるかといった統計的な議論や，さらには人間原理を援用した議論などがあり得るが，いずれにしても，構成的定式化できて初めて，まともな議論ができるようになると思われる．

5. 行列模型による弦理論の構成的定式化

5.1 IIB 行列模型

弦理論の構成的定式化はまだ完成していない．少なくとも，それに基づいて自由に計算ができるような完全な定式化は得られていない．行列模型はその有力な候補であり，いくつかの提案があるが，そのうちで最も高い対称性を持っている IIB 行列模型から議論を始めよう．IIB 行列模型という名前は，IIB 型の弦理論との関係が見やすい模型という意味である．上で述べたように，いろいろな種類の弦理論は一つの理論の異なる真空であり，非摂動効果まで考慮するとすべて同等であると考えられる．その意味で，IIB 行列模型は IIB 型の弦理論だけを記述しているのではなく，弦理論全体を表していると期待される．

IIB 行列模型の作用は

$$S_{\mathrm{IIB}}=\frac{1}{g^2}\mathrm{Tr}\left\{-\frac{1}{4}\left[A_\mu,A_\nu\right]^2-\frac{1}{2}\bar{\psi}\,\gamma^\mu\left[A_\mu,\psi\right]\right\} \tag{1}$$

で与えられる．ここで，A_μ は 10 次元のベクトル，ψ は 10 次元のマヨラナ・ワイルスピノルである．また，A_μ と ψ の各成分は N 行 N 列のエルミート行列であり，理論は N を無限大にする極限として定義される．IIB 行列模型はこのように簡単なものであるが，残念ながら現時点では，完全に正しいのかどうか判定できていない．原理的には，これを解いてみて，本当に時空が 4 次元であるか，低エネルギーで標準理論になっているかなどを調べればいいわけであるが，今のところ，良い近似法が見つかっていない．

この模型が臨界弦の正しい定式化になっていると信じる根拠をいくつかあげておこう．第一に，(1) 式は弦理論の世界面を行列によって正則化したものになっているということである．弦理論の世界面の表し方は何通りかあるが，そのうちで IIB 型の弦に対してグリーンとシュワルツによって与えられたものを考える．それをシルトゲージという特殊なゲージで表すと，次のように書ける．

$$S_{\mathrm{Schild}} = \int d^2\xi\sqrt{g}\left(\frac{1}{4}\left\{X^\mu,X^\nu\right\}^2+\frac{1}{2}\bar{\psi}\,\gamma_\mu\left\{X^\mu,\psi\right\}\right). \tag{2}$$

ここで，X^μ は 10 次元時空における弦の座標であり，ψ はマヨラナ・ワイルスピノルである．また，$\int d^2\xi\sqrt{g}$ は世界面上の積分を意味し，記号 $\{\ ,\ \}$ は世界面を形式的に自由度が 1 の力学系を表す位相空間と見なしたときの，ポアッソン括弧 $\{f,h\}=\frac{\varepsilon^{a\,b}}{\sqrt{g}}\frac{\partial f}{\partial\xi^a}\frac{\partial h}{\partial\xi^b}$ である．

このように，世界面を形式的に力学系を表す位相空間と見なすと，(1) 式と (2) 式の関係はちょうど量子論とその古典極限の関係になっていることがわかる．すなわち，(1) 式において，交換子をポアッソン括弧に置き換え，トレースを位相空間上の積分に置き換えたものが，(2) 式になっているわけである．このことから，(1) 式で N が無限大の極限をとったものは (2) 式を再現していると期待される．ここで重要なことは，シルトゲージの作用 (2) に対しては必ずしも経路積分 $\int[dX]\exp\left(-S_{\mathrm{Schild}}\right)$ の定義は明らかでないのに対し，IIB 行列模型 (1) に対する経路積分 $\int[dA]\exp\left(-S_{\mathrm{IIB}}\right)$ はきちんと定義できることである．また，この模型は IIB 型の弦が持つべき，10 次元 $N=2$ という極大な超対称性をきちんと保っていることも示せる．この意味で，IIB 行列模型はシルトゲージの作用の正則化になっていると言える．

世界面を行列によって正則化すると，弦の多体効果も自然に含まれることがわかる．例えば，行列として 2 つのブロックからなるブロック対角なものを考えると，それは 2 つの連結成分からなる世界面を考えていることに対応する．言い換えると，IIB 行列模型は弦の多体系を記述しており，N を無限大にする極限では無限多体系のダイナミクス，すなわち非摂動効果も自然に記述していると期待される．

IIB 行列模型が正しいと信じる第二の理由は，この理論が重力をきちんと含んでいることである．IIB 行列模型には重力場はあらわには入っていないが，経路積分を行うと重力が正しく再現されていることがわかる．例えば，上で述べたように，行列として 2 つのブロックからなるブロック対角なものを考えると，それは 2 つの互いに離れた物体を表している．そこで，非対角ブロックについて経路積分を行い，2 つのブロックの間の相互作用を計算してみると，確かに，重力子，ディラトン，2 階の反対称テンソル場の交換に対応する力が正しく出ていることがわかる．

IIB 行列模型を信じる第三の理由は，弦の生成・消滅演算子をうまく定義してやると，ある種の仮定の下に，光円錐ゲージにおける弦の場の理論を再現していることが示せることである．まだ完全な証明はないが，いくつかの仮定をすると，IIB 行列模型の形式的な $1/N$ 展開が光円錐ゲージにおける弦の場の理論を再現していることを示すことができる．もしこれが完全に示せれば，IIB 行列模型の漸近展開として弦の摂動級数が再現できたことになり，IIB 行列模型が弦理論の構成的定式化になっていることが証明できたことになる．

いずれにしても，IIB 行列模型が本当に弦理論の構成的定式化になっているかどうかに答えるためには，この模型の性質をもう少し詳しく調べる必要がある．

5.2 他の行列模型

IIB 行列模型は，形式的には，10 次元の超対称ヤン・ミルズ理論を，10 方向の長さがすべてゼロの周期的な箱に入れたものであった．同様に，9 方向の長さはゼロであるが，残りの 1 方向は無限大の箱に入れたものを考えることもできる．そのような理論は M(–atrix) 理論と呼ばれている．これは，ド・ウィット，ホッペ，ニコライによって 11 次元の超対称メンブレンを表すものとしてかなり以前に提唱されていたものを，バンクス，フィシュラー，シェンカー，サスカインドが M–theory

の文脈で再発見したものである．

長さが無限大の方向を時間のように考えると，この系は 9 個の行列を力学変数として持つ量子力学となる．IIB 行列模型の場合と同様に，そのハミルトニアンに現れる交換子をポアッソン括弧で置き換えると，11 次元超対称メンブレンの光円錐ゲージでのハミルトニアンに一致することがわかる．すなわち，この理論は M–theory の行列による正則化になっていると言える．このように M–theory が出てくるところは興味深いが，光円錐ゲージで非摂動効果を議論することは一般に不可能であるし，この理論では 11 次元はおろか 10 次元のローレンツ対称性さえ明白ではない．もちろん，N が無限大の極限でこれらの困難が解消する可能性がまったくないとは言えないが，注意深く分析する必要がある．

また，10 次元の超対称ヤン・ミルズ理論を，8 方向の長さはゼロであるが，残った 2 方向のうち，一つは有限で残りは無限大であるような箱に入れたものを考えることもできる．これは，ディークグラフとベルリンデ兄弟によって提唱されたもので，マトリックスストリングと呼ばれている．詳細は省略するが，この理論は光円錐ゲージの弦理論に近いものであることが知られている．しかしながら，先程も述べたとおり，光円錐ゲージで非摂動効果を取り入れるのは一般に不可能であり，弦理論の構成的定式化としてこの理論が使えるかどうかは明らかではない．

これらの他にも，糸山と戸倉による，Type I 弦理論との関係が見やすい行列模型や，ニールス・ボーア研究所の人たちによる非可換ボルン・インフェルト作用との関係が見やすい行列模型，スモーリンによる超対称リー代数に基づいた行列模型など，いくつかの興味深い模型が提唱されている．

正しい理論は一つだけなのか，場の理論におけるユニバーサリティのように，かなり乱暴なことをしても，対称性さえ押さえておけば正しい理論ができるのか興味深いところである．

6. おわりに

ここ数年，弦理論の発展は多少停滞気味に見える．それは，構成的な定式化がなかなか完成せず，本質的な進歩がなかったからである．現在の行列模型が実は正しい定式化になっているのかもしれないが，残念なことによい近似法が見つかっておらず，現時点ではその判定ができないのである．

もし，現在の行列模型が本当に正しいものであるならば，最も楽観的な見通しは次のようなものだろう．上で議論したように，IIB 行列模型における 10 個の行列は真空に拡がった仮想的な弦の座標と解釈できる．そうすると，もし，経路積分の中で，4 個の行列の固有値分布は無限に拡がっているが，残りの 6 個の行列の固有値分布は小さくまとまっているようなものが支配的であったとすると，それは時空が自発的に 4 次元にコンパクト化していることを意味している．このようにして本当にわれわれの 4 次元時空が得られているかどうか，まだ決定的ではないが，平均場近似による計算などから肯定的な感触もある．もし，これが本当であるならば，そのようにしてできた 4 次元時空の周りでの励起を調べ，軽い粒子の間の相互作用が標準模型と同じものになっているかを検証できる可能性がある．

それほど簡単ではなく，まだまだ理論を修正していかなければならないかもしれない．しかしながら，最近，行列模型の最大の懸案であった対称性の問題に光明が見えてきた．まだ決定的ではないかもしれないが，行列模型の中で，どのようにして曲がった時空が記述され，一般座標変換や局所ローレンツ対称性が実現されているかがわかってきたのである．まだいくつかの曲折はあるだろうが，行列模型のダイナミクスを調べることによって，究極の理論に着実に近づいていくことができるのは確かだと思われる．

参考文献

1) 弦理論の教科書としては次のものがよい．
J. Polchinski, *String Theory*, Cambridge University Press 1998.
2) 行列模型による弦理論の非摂動的定式化の原論文は，
T. Banks, W. Fischler, S.H. Shenker and L. Susskind, *Phys. Rev.* **D55** (1997) 5112; N. Ishibashi, H. Kawai, Y. Kitazawa and A. Tsuchiya, *Nucl. Phys.* **B498** (1997) 467; R. Dijkgraaf, E. Verlinde, and H. Verlinde, *Nucl. Phys.* **B500** (1997) 43.
3) 行列模型の平均場近似の最近の結果は，
T. Aoyama and H. Kawai, “Higher order terms of improved mean field approximation for IIB matrix model and emergence of four-dimensional space-time”, hep-th/0603146.
4) 行列模型の中で曲がった空間がどのように記述されているかは，
M. Hanada, H. Kawai and Y. Kimura, “Curved superspaces and local supersymmetry in supermatrix model”, hep-th/0602210.

（かわい・ひかる，京都大学大学院理学研究科）

弦と重力の泡

中津 了勇

1. はじめに

万有引力の法則とは，質量が m_1 と m_2 の 2 つの質点が距離 r だけ離れているとき，2 つの質点の間に

$$G_{\rm N}\frac{m_1m_2}{r^2} \tag{1}$$

の大きさの引力が働くというものである．$G_{\rm N}$ はニュートンの重力定数である．おおよそ 340 年前，ニュートンはこの法則を用いて太陽の周りの惑星の運動に関するケプラーの法則を説明した．それから 240 年のち，特殊相対性理論をアインシュタインは提出し，さらに，その 10 年後，一般相対性理論に至る．この理論は，すべての物理法則は任意の座標系で成り立つ等式で記述されるという相対性原理と，時空の任意の無限小領域で特殊相対性理論が成立するという等価原理に基づいている．

さて，一般相対性理論誕生から 90 年後の現在，式 (1) の r を 0 にする極限に思いを馳せてみたい．$r=0$ は特異点になっている．確かに．しかし，$r=0$ の特異点を私たちはどうやって探査するのだろう．

これと雰囲気の似た問題が古典物理学の適用限界が明らかになる 90 年前にもあった．ラザフォードの原子模型は，電子が中心にある原子核の周りをクーロン引力を受けて回転しているという原子模型である．電荷 q_1 と q_2 の点電荷が距離 r だけ離れているとき，2 つの点電荷の間に働くクーロン力は

$$\frac{q_1q_2}{r^2} \tag{2}$$

である．古典電磁気学とニュートン力学を用いると，この電子は瞬く間もなく電磁放射して原子核に落ち込んでしまうことになる．その寿命は 10^{-11} s 程度に見積もれる．これは原子の安定性と相容れない．この矛盾を解消する努力が量子力学の発見につながった．不確定性関係

$$[x,p]=i\hbar \tag{3}$$

により，電子はボーア半径 5×10^{-9} cm 程度に安定して存在することが示されるのである．$\hbar$ はプランクの定数である．

クーロン力に関して言えば，すでに電磁気力は電磁場＝光のマクスウェル方程式で定式化されていた．特殊相対性理論を生む契機となった古典電磁力学は量子力学と融合され，量子電磁力学となる．場に不確定性関係を要請することで，古典的な場は量子場になる．電磁場は光子という量子の生成・消滅を記述し，同様に，電子は電子場として電子と陽電子の生成・消滅を記述する．クーロン力の特異点を量子電磁力学で理解しようとすると，すぐにいわゆる発散の困難に遭遇する．この相互作用を $\hbar$ の摂動展開で与えようとすれば，高次の摂動項が無限大になってしまう．しかし，この無限大の問題は発散量を繰り込み理論で処理することで解決する．そして，量子電磁力学は弱い相互作用のスケール 10^{-14} cm 以上の現象を厳密に記述している．

$G_{\rm N}$ と $\hbar$ と光速 c で決まる長さをプランクの長さと呼ぶ．10^{-33} cm 程度の微小な長さである．これは重力と量子力学の融合，すなわち，量子重力のスケールである．重力の量子論において，時空はその幾何構造のみならずトポロジーすら大きく揺らいで，泡のようになっているかもしれない[1)]．これは魅力的な見解ではあるが，私たちはまだ量子重力を理解できずにいる．

弦理論は重力子を含んでおり，量子重力を記述する有力な候補である．弦理論は時空を運動する 1 次元的な弦の生成・消滅や相互作用の理論である．弦は $l_{\rm s}$ の長さを持ち，$1/2\pi l_{\rm s}^2$ のテンションで振動している．弦

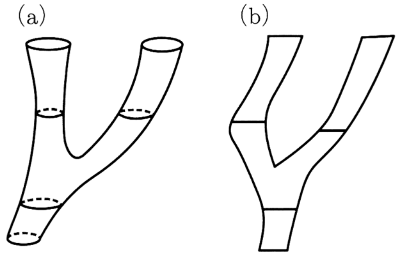


図1　閉じた弦 (a) と開いた弦 (b) の時空の軌跡.

の振動モードに由来して無限個の点粒子が現れる．弦の振動エネルギーが点粒子の質量に転じるから，l_s をプランク長さとすれば，その静止質量の典型はプランク重さ程度である．これは電子の静止質量の 10^{22} 倍であり，非常に重い．

閉じた弦と開いた弦がある．弦は時空を運動し面を掃くから，その軌跡を世界面と呼ばれる 2 次元面 Σ から時空への写像とみることができる．弦の生成・消滅や相互作用に応じて，Σ のトポロジーが決まる (図 1)．世界面のトポロジーに関する展開は，弦のもう 1 つのパラメター g_{st} による展開である．

私たちの 4 次元時空は小さく丸まった 6 次元内部空間を伴うと弦理論では考えている．カルザ・クラインに流れを汲む考え方である．この 6 次元空間すら，l_s のスケールでみれば，幾何構造やトポロジーまで大きく揺らいでいるかもしれない．

以下，10 次元の IIa 型超弦理論の複素 3 次元カラビ・ヤウ多様体を用いたコンパクト化を論じる．特に，内部空間の l_s 程度にぼやけた幾何構造が 4 次元 $N=2$ 超対称ゲージ理論の厳密な有効理論を与える事情を説明し，このぼやけた幾何構造が 3 次元結晶の溶解の模型（ランダム立体ヤング図形）の熱力学極限として理解できるという位相的弦理論の最近の進展[2,3]を駆け足で述べる．

2. 超弦理論と超対称性

弦に超対称性を要請したものが超弦である．理論に現れるボゾンとフェルミオンの入れ替えに関する対称性のことを超対称性と呼んでいる．超対称でない弦のスペクトルにはタキオンが現れ，その真空が安定でないことが知られている．超弦のスペクトルからはタキオンが取り除かれる．すなわち，超対称性の効果で安定な真空が得られる．超弦の生成・消滅や相互作用を記述するのに，2 次元共形場理論が有効である．このとき，世界面の共形変換に関する不変性から時空の次元が 10 に制限される．

10 次元の超弦理論には 5 つのバージョンがある．II 型超弦は閉じた弦で，その世界面は向き付け可能な閉じた 2 次元面に限られている．時空のパリティ変換で不変か否かに応じて，IIa 型超弦あるいは IIb 型超弦と呼ばれる．ヘテロティック超弦も閉じた弦で，その世界面は向き付け可能な閉じた 2 次元面である．ヘテロティック超弦はゲージ群として $SO(32)$ もしくは $E_8 \times E_8$ を持つ．II 型超弦がいわば電気的絶縁体であるのに，ゲージ粒子を含むヘテロティック弦は超伝導体にあたる．I 型超弦の世界面は向き付け不可能な 2 次元面である．世界面には境界があってもよいし，無くてもよい．つまり，閉じた弦と開いた弦が混在する．世界面の境界は開いた弦の端に相当しており，電荷を運ぶことができる．いずれの超弦理論もそのスペクトルに重力子を含んでおり，超弦理論が一般相対論とゲージ理論の統合・拡張になり得る可能性を示している．

ポアンカレ代数はミンコフスキー空間のローレンツ回転の生成子 J_{MN}（角運動量）と並進の生成子 P_M（運動量）のなす代数である．運動量はローレンツ回転でベクトルとして変換する．超対称代数は，超電荷と呼ばれるローレンツ回転でスピノルとして変換するフェルミオン的な生成子をポアンカレ代数に付け加えて得られる．N 組の超電荷で拡大超対称代数を考えることも可能である．これらは N の値に応じて $N=1$ 超対称性，$N=2$ 超対称性などと呼ばれている．10 次元ではワイルのスピノルから超対称代数が得られる事情で，そのカイラリティーに応じて，$(1,0)$ 超対称性あるいは $(0,1)$ 超対称性と呼ばれる．これらを組み合わせて得られる $(1,1)$ 超対称性と $(2,0)$ 超対称性は前者を IIa 型超対称性，後者を IIb 型超対称性と呼んでいる．IIa 型超弦と IIb 型超弦には，それぞれ IIa 型超対称性と IIb 型超対称性がある．

ローレンツ回転と並進で共変に振る舞う粒子はポアンカレ群の表現で分類できる．超電荷は，そのうちのボゾンをフェルミオン，フェルミオンをボゾンに移す変換を生成している．この変換で移りあう粒子を一組にまとめて超多重項と言う．例えば，重力子を含む多重項は超重力多重項，ゲージ粒子を含む多重項は超ベクトル多重項と呼んでいる．10 次元の II 型超対称性には $2^5=32$ 個の超電荷がある．これは物理的に許される最高数の超電荷である．このため，零質量の多重項は超重力多重項に限られている．II 型超弦にはこの

超対称性があるので，その零質量粒子はII型超重力多重項にほかならない．IIa型超重力多重項とIIb型超重力多重項に現れる粒子をボゾン場に限って述べると以下のようになる．

$$\begin{aligned}&\text{IIa}:\ \phi, G_{MN}, B_{MN}, C_M, C_{LMN}.\\&\text{IIb}:\ \phi, G_{MN}, B_{MN}, C, C_{MN}, C_{KLMN}.\end{aligned}\tag{4}$$

ϕ はディラトン場，G_{MN} は重力場，B_{MN} は2階反対称テンソル場である．これらはII型超弦の立場からNS–NS場と呼ばれている．残りの零質量場はすべて完全反対称テンソル場であり，II型超弦の立場からR–R場と呼ばれている．

3. 超弦のコンパクト化

時空が5次元以上の高次元の空間であって，低いエネルギーで余剰な次元の座標は十分小さく丸まって観測にかからないのかもしれない，というのはカルーザとクラインに始まる古くからの考え方である．重力と電磁力の統一的な記述を目的としたカルーザ・クライン理論においては，余剰な5次元を半径が十分小さい S^1 とする5次元理論が考えられた．4次元の物理を10次元の超弦理論からコンパクト化と呼ぶ手法で記述するのにこの考え方が用いられる．すなわち，10次元ミンコフスキー空間 $\mathbb{R}^{1,9}$ を $\mathbb{R}^{1,3}\times X^6$ に置き換え，余剰な6次元空間 X は十分小さい曲がった空間になっていると考えるのである．これを弦理論のコンパクト化と呼ぶ．コンパクト化される6次元空間は内部空間と考えられ，その幾何学的な性質が4次元の物理に伝播する．

コンパクト化によって10次元II型超弦から4次元 $N=2$ 超対称性を持つ超弦を得ることを考えよう．内部空間のホロノミー群が $SU(3)\subset SU(4)\simeq SO(6)$ であればよい．丁度1つ大域的スピノルが存在して，4次元 $N=2$ 超対称性が得られる．ホロノミーが $SU(3)$ となる6次元空間はカラビ・ヤウ多様体と呼ばれるケーラー多様体で与えられる．

カラビ・ヤウ多様体にはリッチテンソルをゼロにするケーラー計量が必ず存在することが知られている．そのリッチ平坦なケーラー計量が $SU(3)$ ホロノミーを実現する．内部空間をカラビ・ヤウ多様体 X としよう．複素座標 $z^i(i=1,2,3)$ を用いると，計量テンソルは $(1,1)$ 成分のみである．これから決まる $(1,1)$ 形式

$$\omega=\sqrt{-1}\sum_{i,j=1}^{3}G_{i\bar{j}}dz^i\wedge d\bar{z}^j\tag{5}$$

はケーラー形式と呼ばれる閉じた実2形式である．また，$G_{i\bar{j}}$ のリッチテンソル $R_{i\bar{j}}$ が消えることから，至る所ゼロにならない正則3形式

$$\Omega=\frac{1}{3!}\sum_{i,j,k=1}^{3}\Omega_{ijk}dz^i\wedge dz^j\wedge dz^k\tag{6}$$

が存在することがわかる．

4次元に現れる零質量粒子をカルーザとクラインの手法を用いて調べることができる．この手法では，高次元の場を内部空間の関数（形式）でモード展開し，その係数が4次元の場を与えると考える．カラビ・ヤウ多様体 X 上の調和形式にモードを持つ10次元背景場の揺らぎが4次元零質量場を与えている．調和 $(1,1)$ 形式と調和 $(2,1)$ 形式の基底を，$\omega_A^{(1,1)}$ $(A=1,\cdots,h_{1,1})$ ならびに $\chi_a^{(2,1)}$ $(a=1,\cdots,h_{2,1})$ とする．これらの調和形式によるNS–NS場の展開*1)

$$\delta G_{i\bar{j}}(x,y)+\delta B_{i\bar{j}}(x,y)=\sum_{A=1}^{h_{1,1}}T^A(x)\,\omega^{(1,1)}_{A\,i\bar{j}}(y),\tag{7}$$

$$\delta G_{ij\bar{k}}(x,y)=\sum_{a=1}^{h_{2,1}}\phi^a(x)\,\chi^{(2,1)}_{a\,ij\bar{k}}(y)\tag{8}$$

から $h_{1,1}+h_{2,1}$ 個の零質量複素スカラー場 $T^A(x)$, $\phi^a(x)$ が生じる．NS–NS場の他の揺らぎからは，$\delta G_{\mu\nu}(x,y)$ は4次元重力場 $g_{\mu\nu}$ を，また，$\delta B_{\mu\nu}(x,y)$ と $\delta\phi(x,y)$ は合わせて1個の複素スカラー場 $\varphi(x)$ を与える．

10次元R–R場の内容はIIa型とIIb型で異なるから，その揺らぎから生じる4次元零質量場も異なる．いずれにしても，4次元 $N=2$ 超対称性があるので，すべての零質量場はその超多重項にまとめることができる．$N=2$ 超重力多重項は重力子と $U(1)$ 重力光子，ベクトル多重項はゲージ場と随伴作用でゲージ変換する複素スカラー場，ハイパー多重項は2つの複素スカラー場が，各超多重項のボゾン場の内容である．

II型共通の零質量超多重項は超重力多重項と φ を含むハイパー多重項である．$U(1)$ 重力光子はR–R形式場の揺らぎから生じる．10次元のディラトン場 ϕ は弦の結合定数 $g_{\rm st}$ と関係 $g_{\rm st}=e^{\phi}$ で結ばれるから，4

*1) $(0,2)$ 型の変形 $\delta G_{\bar{i}\bar{j}}$ は正則3形式 Ω を用いて $(2,1)$ 形式 $\delta G_{ij\bar{k}}$ と見ることができる．$(2,0)$ 型の変形は $(0,2)$ 型の変形の複素共役．

次元 $N=2$ 超弦の結合定数は $g_{\rm st}=e^{\varphi}$ である．特に，$g_{\rm st}$ はハイパー多重項として振る舞う．

II 型共通の超多重項を別にすると，4 次元 IIa 超弦の零質量超多重項は $h_{1,1}$ 個のベクトル多重項と $h_{2,1}$ 個のハイパー多重項からなる．複素スカラー場 T^A はベクトル多重項に属する．残りの複素スカラー場 ϕ^a はハイパー多重項に属している．IIb 超弦の零質量超多重項はこれと逆になる．すなわち，$h_{1,1}$ 個のハイパー多重項と $h_{2,1}$ 個のベクトル多重項が存在する．T^A はハイパー多重項に，ϕ^a はベクトル多重項に属している．

4. 4 次元の低エネルギー有効理論

理論を零質量状態を残して積分することにより得られる，零質量場で書かれた理論を最初の理論の低エネルギー有効理論と言う．

弦の有質量状態はその振動モード特有の $l_{\rm s}^{-1}$ 程度の質量を持つ無限個の粒子のタワーである．よく知られた II 型超重力の古典作用はこのタワーを落として得られる．弦の摂動論の範囲で，この作用には $g_{\rm st}^2$ と $\alpha' \equiv l_{\rm s}^2$ の正冪で展開される相互作用項の補正が加わる．

弦の相互作用は世界面 Σ のトポロジーで分類されていた．閉じた弦の世界面は境界のない 2 次元面である．そのトポロジーは面の種数で分類できる．種数 g の世界面からくる弦の振幅には弦の結合定数の冪 $g_{\rm st}^{2g-2}$ が掛かることになる．これは場の理論のループ展開，すなわち，$\hbar$ 展開に対応している．

$l_{\rm s}^{-1}$ 程度の質量を持つ無限個の粒子のタワーの積分がいわゆる α' 補正を与える．すなわち，$\alpha' p_{\rm ext}^2$ の正冪を零質量場に掛ける．零質量粒子たちの運動量を象徴的に $p_{\rm ext}$ と書いている．$g=0$ の場合がわかりやすい．これは場の理論のツリーに対応しているから，運動量の保存則により，内線を走る有質量状態のプロパゲーターは $(\alpha' p_{\rm ext}^2+n)^{-1}$ の形をしている．$\alpha' p_{\rm ext}^2 \ll 1$ なので，このプロパゲーターは $\alpha' p_{\rm ext}^2/n$ の正冪で展開できる．

さて，10 次元 IIa 超弦からカラビ・ヤウ多様体 X のコンパクト化により得られる 4 次元 $N=2$ 超弦の零質量場の有効理論を考えたい．この有効理論は 4 次元 $N=2$ 超重力理論である．小さい超対称性であるから，すべての零質量場にわたる有効理論を記述するのは困難であるが，逆に，小さいぶん，統制可能なセクターを拾い出すことができる．以下，特に，$h_{1,1}$ 個のベクトル多重項に注目しよう．$N=2$ 超重力と結合することにより，ベクトル多重項のモジュライ空間 $\mathcal{M}_X^{\rm vec}$ は特殊なケーラー構造を持った非コンパクトなケーラー多様体になることが知られている．表式の X はコンパクト化するのに使ったカラビ・ヤウ多様体である．4 次元の物理の立場からは，$\mathcal{M}_X^{\rm vec}$ 上に特殊なケーラー構造を入れることが低エネルギー有効理論を与えることに同値である．ベクトル多重項の複素スカラー場の期待値を T^A と書くことにすれば，$\mathcal{M}_X^{\rm vec}$ の複素座標は $T^A(A=1,\cdots,h_{1,1})$ で与えられる．(7) 式から，T^A が X の複素化したケーラー形式を表している．

$$\sum_{A=1}^{h_{1,1}} T^A \omega_A^{(1,1)} = \omega + \sqrt{-1}B. \tag{9}$$

一般に，特殊なケーラー構造とはプレポテンシャルと呼ばれる正則関数から決まるケーラー構造のことを指す．今の状況に即して言えば，$\mathcal{M}_X^{\rm vec}$ の特殊なケーラー構造とは，正則関数 $\mathcal{F}(T)$ で次のように表されるケーラーポテンシャル $K(T,T^*)$ が定める $\mathcal{M}_X^{\rm vec}$ のケーラー構造のことを言う．

$$\exp\{-K(T,T^*)\} = \mathrm{Im}\left(\sum_A T^{A*}\frac{\partial \mathcal{F}(T)}{\partial T^A}\right). \tag{10}$$

プレポテンシャル $\mathcal{F}(T)$ を知ることが目標になる．超対称性のキネマティカルな議論で，ベクトル多重項のモジュライとハイパー多重項のモジュライは互いに独立であることが言えてしまう．これを今の場合に当てはめると，弦の結合定数 $g_{\rm st}$ がハイパー多重項として振る舞うので，$\mathcal{M}_X^{\rm vec}$ 上の関数は弦の結合定数 $g_{\rm st}$ に依存し得ない，弦の高次のループ補正を受けないことがわかる．つまり，$\mathcal{F}(T)$ は種数 $g=0$ からの寄与のみで与えられる．

プレポテンシャルに対する種数 $g=0$ からの寄与を知りたい．詳細は略すが，$\mathcal{F}(T)$ が T^A の正則関数であることから，α' の冪の補正がほぼ無いことが導かれる．しかしながら，弦の世界面が内部空間の 2 サイクルに巻き付くインスタントン効果の寄与 $\sim e^{-\mathrm{Area}/\alpha'}$ がある．X を標的空間（時空）とするポリヤコフ作用 S を評価すればよい．

$$S[Z] = \frac{1}{2\pi\alpha'}\int_\Sigma d\sigma^2\left(\partial Z^i \overline{\partial Z^j} + \bar\partial Z^i \overline{\bar\partial Z^j}\right) G_{i\bar j}. \tag{11}$$

X のケーラー形式 ω を用いて，世界面 Σ からの任意の写像 $Z^i(z,\bar z)$ に対して

$$S[Z] \geq \frac{1}{2\pi\alpha'}\left|\int_{Z(\mathbb{CP}_1)}\omega\right| \tag{12}$$

と評価できる．右辺は 2 サイクルの面積である．等号は Z^i が正則写像

$$\overline{\partial}_z Z^i = 0 \tag{13}$$

のときに成り立つ．

以上の考察をまとめると，10 次元 IIa 超弦からカラビ・ヤウ多様体 X のコンパクト化により得られる 4 次元 $N=2$ 超弦のベクトル多重項のモジュライ $\mathcal{M}_X^{\mathrm{vec}}$ の厳密なプレポテンシャル $\mathcal{F}(T)$ は次の形を持つことになる．

$$\mathcal{F}(T) = \frac{1}{3!}\int_X(\omega+\sqrt{-1}B)^3 + \lambda + \sum_{\beta\neq 0\in H_2(X,\mathbb{Z})} N(\beta)\exp\left\{\frac{-1}{2\pi\alpha'}\int_\beta \omega+\sqrt{-1}B\right\}. \tag{14}$$

$N(\beta)$ は X の 2 サイクル β に巻き付くインスタントンの数，すなわち，2 サイクル β にホモロガスとなる $\mathbb{CP}_1$ から X への正則写像の数である．(14) 式の最初の項はカラビ・ヤウ多様体 X の複素化したケーラー形式の 3 重交叉であるから，X の複素化した体積である．この項は 10 次元 IIa 型超重力の古典作用の次元降下から得られる．

5. 位相的弦理論

プレポテンシャル (14) は，グロモフ・ウィッテンのポテンシャルと呼ばれる，X のシンプレクティク構造の不変量の母関数でもある．X の 2 サイクルの交叉を古典的に数えるのでなく，$\mathbb{CP}_1$ からの正則写像の効果でファジーに数えることで定義される不変量である．交叉をファジーに数えるという立場から，2 次元球面より高い種数の世界面を用いてみるのは自然で，実際，種数 g の世界面を用いて一般化したグロモフ・ウィッテンのポテンシャル $F_g(T)$ $(g\geq 1)$ が定義されている．これらの量は位相的弦理論で表すことができる．以下，(14) のプレポテンシャルを $F_0(T)$ と書くことにする．種数 g に関する和をとった量

$$F(T;g_{\mathrm{st}}) = \sum_{g=0}^{\infty} g_{\mathrm{st}}^{2g-2}F_g(T) \tag{15}$$

は A 模型位相的弦の自由エネルギーと同一である．すなわち，X を標的空間とする A 模型位相的弦の分配関数は

$$Z_{\mathrm{top}.A}(T;g_{\mathrm{st}};X) = \exp\{-F(T;g_{\mathrm{st}})\} \tag{16}$$

に他ならない．

A 模型位相的弦に関する理解が世紀末から著しく進んでおり，特に，トーリック多様体の構造を持つ非コンパクトなカラビ・ヤウ多様体に対する分配関数を厳密に計算できるようになっている[4]．以下，その契機となったゴパクマルとバッファの仕事[5] で述べられた不思議な方法で簡単な場合の厳密解を求めよう．

ベクトル多重項の有効理論から見ると，高い種数のグロモフ・ウィッテンのポテンシャルはベクトル多重項と重力多重項の結合を記述する[6]．$F_g(T)$ $(g\geq 1)$ は 2 個の重力子と $2g-2$ 個の $U(1)$ 重力光子との結合を与えている．

$U(1)$ 重力光子は R–R1 形式場 C_M の次元降下であることを思い出そう．D0 ブレーンは $U(1)$ 重力光子の電荷を持っている．他のブレーンも R–R1 形式場とチャーン・サイモン型の結合をするから，$U(1)$ 重力光子の電荷を持ち得る．ゴパクマル・バッファの不思議な方法というのは，ベクトル多重項と $U(1)$ 重力光子の結合をブレーンを用いて計算するというものである．内部空間の 2 サイクルに巻付いた 2 ブレーンが重要になる．1 つの 2 サイクルに注目しよう．その面積を A とする．このサイクルに巻付いて BPS 状態にある 1 枚の 2 ブレーンを考える．2 ブレーンは空間方向に 2 次元の拡がりがあるから，$\mathbb{R}^{1,3}$ では粒子に見えている．BPS 状態であるということは，2 ブレーンの持つ R–R 電荷と質量がバランスしていることを意味する．このことを用いて粒子の質量を求めることが可能で，その質量は $\simeq A/g_{\mathrm{st}}l_{\mathrm{s}}^3$ となる．粒子がスカラー粒子であるか，ベクトル粒子であるかはブレーンの巻付いた 2 サイクルによっている．BPS 状態を保ちながらサイクルを動かせない場合はスカラー粒子であるし，動かせる場合はベクトル粒子になる．以下，スカラー粒子であるとする．つまり，考えている X の 2 サイクルは堅固である．

このブレーンの配位に 0 ブレーンを加えて一般化しよう．この系には束縛された BPS 状態があり，$\mathbb{R}^{1,3}$ では粒子に見えている．n 個の 0 ブレーンと作る束縛状態の 4 次元粒子の質量 M と電荷 e は計算できる．

$$\begin{aligned} M^2 &= (nZ_{D0})^2 + Z_{D2}^2, \\ eg_{\mathrm{st}} &= nZ_{D0} + iZ_{D2}. \end{aligned} \tag{17}$$

Z_{D2}, Z_{D0} は 2 ブレーンと 0 ブレーンの中心電荷と呼ばれ，エネルギーの次元を持つ量である．

$$Z_{D0} = \frac{1}{g_{\rm st} l_{\rm s}}, \quad Z_{D2} = \frac{A}{2\pi g_{\rm st} l_{\rm s}^3}. \tag{18}$$

この荷電粒子のスカラー場が $U(1)$ 重力光子とミニマルに結合しているとする．$U(1)$ 重力光子が背景場として存在する状況で，この荷電粒子の分配関数を求めればよい，というのがゴパクマル・バッファのアイデアの実際である．これは 1 ループ行列式の評価である．ベクトル多重項との結合には $U(1)$ 重力光子の自己双対成分しか効かないことから，背景場は自己双対な定常電磁場でよい．その強さを $F=(2\pi l_{\rm s})^{-1}$ とすると，スカラー場の自由エネルギーは

$$F_{nD0+D2} = \int_0^\infty \frac{ds}{s}\left(\frac{s/2}{\sinh s/2}\right)^2 e^{-\frac{2\pi s}{g_{\rm st}}\left(in+\frac{A}{2\pi l_{\rm s}^2}\right)} \tag{19}$$

と計算できる．

異なる個数の 0 ブレーンがある場合も等しく考慮するべきなので，0 ブレーンの個数に関する和をとる．積分を実行して，次のようにまとめることができる．

$$\begin{aligned} Z(q,Q) &\equiv \exp\left\{-\sum_n F_{nD0+D2}\right\} \\ &= \frac{1}{\prod_{n=1}^\infty (1-Qq^n)^n}, \end{aligned} \tag{20}$$

$$q \equiv e^{-g_{\rm st}}, \quad Q \equiv e^{-A/l_{\rm s}^2}. \tag{21}$$

(20) はコニフォールド特異点を $\mathbb{CP}_1$ でブローアップしたカラビ・ヤウ多様体の A 模型位相的弦の分配関数である．ブレーンの巻き付いたサイクルが特異点解消の $\mathbb{CP}_1$ で，面積 A は $\mathbb{CP}_1$ のケーラー面積に対応している．

6. ランダム立体ヤング図形

A 模型位相的弦の厳密な分配関数は全く予想しなかった統計模型（ランダム立体ヤング図形）に顔を見せる．その相互の関係を考察することにより，A 模型位相的弦の新しい解釈が文献 2, 3) で与えられた．以下，前節の例に即した簡単な場合について，その考え方を説明する．

整数の非増大列 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots)$；$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots$ で，ある番号から先はすべて 0 であるものを分割（パーティション）と呼ぶ．$|\lambda|=\lambda_1+\lambda_2+\cdots$ とすると，分割 λ は自然数 $|\lambda|$ を幾つかの自然数の和に表すやり方である．分割はヤング図形を用いて視覚化できる．

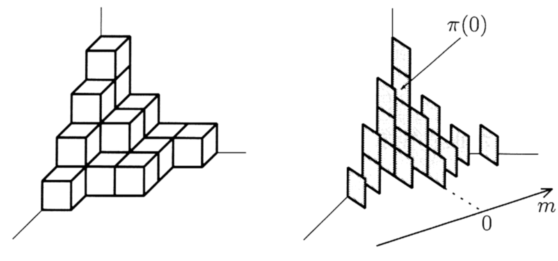


図 2 (a) 立体ヤング図形と (b) ヤング図形の列．

分割 λ に対応するヤング図形は分割の λ_i の場所に λ_i 個の箱を並べたものする．$|\lambda|$ はこのヤング図形を構成する箱の個数である．

分割は 1 次元的な配列であるが，これを 2 次元的な配列に一般化したものを 2 次元分割（プレーンパーティション）と呼ぶ．2 次元分割 π は非負整数の配列

$$\begin{matrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{13} & \cdots \\ \pi_{21} & \pi_{22} & \pi_{23} & \cdots \\ \pi_{31} & \pi_{32} & \pi_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{matrix} \tag{22}$$

であって，任意に 1 つの列もしくは段を固定したとき，そこに現れる非負整数の配列が分割となるものである．2 次元分割は立体ヤング図形を用いて視覚化できる．2 次元分割 π に対応する立体ヤング図形は配列の π_{ij} の場所に π_{ij} 個の単位立方体を垂直に重ねて置いたものである（図 2 (a)）．

ヤング図形を構成する箱の個数の重みで測ることにすると，すべてのヤング図形の重み付き数え上げは分割数の母関数

$$\sum_\lambda q^{|\lambda|} = \frac{1}{\prod_{n=1}^\infty (1-q^n)} \tag{23}$$

となる．立体ヤング図形の同様の数え上げはマクマホンの公式として知られている．立体ヤング図形 π を構成する単位立方体の個数は $\sum_{i,j\geq 1}\pi_{ij}$ であり，これを $|\pi|$ で表すことにする．この重みを付けたすべての立体ヤング図形の数え上げは

$$\sum_\pi q^{|\pi|} = \frac{1}{\prod_{n=1}^\infty (1-q^n)^n} \tag{24}$$

となる．右辺はマクマホン関数と呼ばれている．

立体ヤング図形の数え上げを 3 次元の結晶溶解を記述する統計モデルに見立てることができる．特に，(24) は統計模型の分配関数となる．たくさんの単位立方体が集まって結晶になっているとしよう．3 次元格子の

オクタント $\mathbf{Z}^3_{\geq 0}$ にある全格子点に単位立方体を置いて，オクタントを単位立方体で埋め尽くしたものを結晶の角の近傍と理解する．この角の部分から結晶は溶解する．単位立方体が立体ヤング図形を作って角から溶け出すと考えるのである．

ブレーンの束縛状態を用いる (20) を導く計算は，2 ブレーンが無くても成り立つ．(17) から 2 ブレーンの寄与を消せばよい．0 ブレーンの個数について足しあげたものはマクマホン関数である．これは $X = \mathbb{C}^3$ の位相的弦の分配関数に他ならない．

$\mathbb{C}^3$ の複素座標を (x, y, z) とすると，$\mathbb{C}^3$ の正則な関数全体は積と和で閉じた 3 変数 x, y, z の多項式環 $\mathbb{C}[x, y, z] = \bigoplus_{i,j,k\geq 0} \mathbb{C}\, x^i y^j z^k$ である．立体ヤング図形 π はこの多項式環のイデアル I_π を

$$I_\pi = \bigoplus_{k\geq \pi_{ij};\, i,j\geq 1} \mathbb{C}\, x^{i-1} y^{i-1} z^k \qquad (25)$$

によって与えている．イデアル I_π の商 $I^c_\pi \equiv \mathbb{C}[x, y, z] / I_\pi$ が立体ヤング図形に自然に対応する．

立体ヤング図形 π の足し上げを多項式環のイデアル I_π の足し上げと理解するというのが，文献 3) の基本的な考え方である．$\mathbb{C}^3$ の原点をブロウアップして得られるトーリック多様体 $\hat{X}$ に対しては，立体ヤング図形 π を上手に選べば，そのイデアル I_π を丁度 $\hat{X}$ の正則関数環であるようにできる．このような π の足し上げはブロウアップして得られるトーリック多様体の足し上げ，すなわち，幾何学的足し上げを導く．任意の I_π がブロウアップして得られる幾何を記述するわけではない．幾何学的でない足し上げも寄与することになる．

2 次元的な配列 (22) は対角成分ごとにも分割の列を定めている．m を整数として，$j - i = m$ を満たす π_{ij} の配列を端から並べて定まる分割を $\pi(m)$ で表す．$\pi(0) = (\pi_{11}, \pi_{22}, \cdots)$, $\pi(-1) = (\pi_{21}, \pi_{32}, \cdots), \cdots$ と言った具合である．こうすると立体ヤング図形 π をヤング図形からなる列 $\cdots, \pi(-1), \pi(0), \pi(1), \cdots$ とみなすことができる（図 2 (b)）．

立体ヤング図形を構成する単位立方体の個数に加えて，$m = 0$ の主対角線上にある単位立方体の個数も重みにして立体ヤング図形を測ることにする．この二重の重み付きの立体ヤング図形の数え上げも計算することができて，Q に依存したマクマホン関数で与えられる．

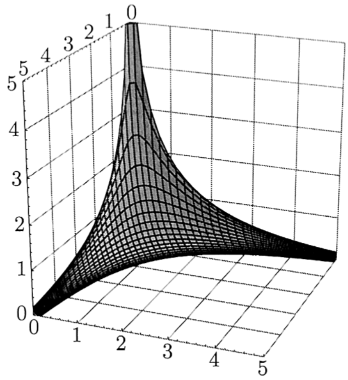


図 3　リミットシェープの例．

$$\sum_\pi q^{|\pi|} Q^{|\pi(0)|} = \frac{1}{\prod_{n=1}^\infty (1 - Qq^n)^n}. \qquad (26)$$

上で用いた q, Q を (21) を用いて $g_{\rm st}, A$ と対応させよう．$g_{\rm st} \approx 0$ のとき，立体ヤング図形の単位立方体の個数の平均は $\langle |\pi| \rangle = O(g_{\rm st}^{-3})$ で振る舞っている．つまり，$g_{\rm st}$ を 0 にする極限は統計模型の熱力学極限（巨大粒子数極限）である．体積 1 の単位立方体の各辺を $g_{\rm st}$ 倍して体積 $g_{\rm st}^3$ の立方体にスケールする．単位立方体の総数 $|\pi|$ をその体積と解釈すれば，熱力学極限でリミットシェープと呼ばれる体積有限の巨視的な構造が見えてくる．実際，$g_{\rm st}$ を 0 にする極限が古典極限とみなせる．位相的弦の $g_{\rm st}$ の展開は世界面の種数の展開であるから，$g = 0$ の寄与，すなわち，4 次元 $N = 2$ 超弦のベクトル多重項のモジュライ $\mathcal{M}_X^{\rm vec}$ の厳密なプレポテンシャル (14) が対応している．

参考文献

1) S.W. Hawking, *Nucl. Phys.* **B144** (1978) 349.
2) A. Okounkov, N. R. Reshetikhin and C. Vafa, "Quantum Calabi-Yau and Classical Crystal," hep-th/0309208
3) A. Iqbal, N. Nekrasov, A. Okounkov and C. Vafa, "Quantum Foam and Topological Strings," hep-th/0312022
4) M. Aganagic, A. Klemm et al, *Commun. Math. Phys.* **254** (2005) 425, hep-th/0305132
5) R. Gopakumar and C. Vafa, *Adv. Theor. Math. Phys.* **3** (1999) 1415, hep-th/9811131
6) M. Bershadsky, S. Cecotti, H. Ooguri and C. Vafa, *Commun. Math. Phys.* **165** (1994) 311, hep-th/9309140

（なかつ・としお，大阪大学大学院理学研究科）

名著に親しむ

――特集から広がる読書案内――

藤井 保憲

一般相対性理論への道 私の遍歴

1970年，それまで主として携わってきた素粒子理論から少し枠を広げて，重力理論をやってみたいと思うようになった．一つには 'Non-Newtonian gravity' というタイトルで「風変わりな」論文を書いたからであったが，アメリカに比べてヨーロッパでは，素粒子論研究者の間でも一般相対論への思い入れが予想以上に強いことを知ったためでもあった．

まず取りかかったのは山内，内山，中野氏の教科書『一般相対性および重力の理論』であった．当時この理論に関する本としては W. Pauli や C. Møller のものなどがあったが，やはり日本語で書かれた上記の本に注目した．特に内山先生は，当時も大阪大学教授として相対論の授業をなさっていて，友人たちから先生の常日頃の授業や議論のあり方について聞き知っていたし，何か議論をして頂けるかも，という期待もあった．その後の研究会などで，その期待はかなえられた．例えば，上記の 'Non-Newtonian gravity' に関しても，理論的可能性としては認めて頂いたが，その必然性については，随分辛辣なご意見を伺ったりもした．一方，1974年，イスラエルで開かれた会議では，同じホテルに宿泊する機会にも恵まれ，ご自身の理論と Yang–Mills 理論との関係について，極めて率直なお話しを伺うこともできた．あまり多すぎない題材について，日頃の口調を思い出させるような丁寧な説明が随所に見られ，一般相対性理論についての全体像を習得できたと思っている．

続いて読んだのが，ランダウ・リフシッツ著，広重徹・恒藤敏彦訳の『場の古典論』であった．しかしこの本では一般相対論は，特殊相対論や電磁波の理論など多くの主題が並ぶ中の一部に過ぎず，前掲の内山先生の本などに比べて極めて簡潔で，俗人がリーマン幾何学の細部に慣れ親しむには多少不十分とも感じた．しかし，この本から出発して，自分独自の体系を作り上げる自由度を与えてくれている，とも解釈できよう．

ところで現在の天文学，特に宇宙論に関しては，一般相対性理論は必要不可欠な言語，あるいは道具となっていて，多くの観測結果は一般相対性理論に基づいて解析されている．さらに観測技術の長足の進歩と共に多彩な論文，著作が次々と出版されている．そもそも宇宙論の分野にはどんな現象があり，一般相対性理論がどのように駆使されているかを知るにはやはり，S. Weinberg の "Gravitation and Cosmology" を挙げておきたい．物理的現象に関する Weinberg の広い視野を余すところなく示しており，1972年という古さにも関わらず，その後の発展の鍵を理解させてくれる．ただ，私自身，この大部の著書を読み通したわけではない．同じ時代に書かれた C.W. Misner, K.S. Thorn and J.A. Wheeler による "Gravitation" も同様の傾向で，百科事典的な価値を認められてはいるが，telephone book というニックネーム通り，教科書として読み通すには厚すぎるきらいもある．

一方，現象論的な応用とは別に，一般相対性理論はそれ自身の理論的発展を遂げつつある．それは素粒子物理を含んだ統一理論という Einstein 自身の夢に沿ったものであるが，ゲージ理論や弦理論という，素粒子論の直接の発展とも結びついている．特に一般相対論をゲージ理論として見直す議論では，内山先生や T.W.B. Kibble らの寄与は大きい．さらに多次元時空や，その部分的コンパクト化などについても著しい発展があり，その分野での文献も多い．しかしここでは，「スカラー・テンソル理論」に範囲を限ることとしたい．その理由として，これは標準理論としての一般相対論の最も単純で，しかも実用的な拡張でもあること，また最近の「加速宇宙」の現象を理解する鍵ともなっていることを強調しておきたい．その関連で，前田氏と私の "The Scalar–Tensor Theory of Gravitation" を選んだ．私自身も共著者の一人である著作を「名著」に含めることには躊躇もあったが，類書も見当らぬことを言い訳に，お許しを頂きたい．

（ふじい・やすのり，東京大学名誉教授）

一般相対性および重力の理論



山内恭彦・内山龍雄・中野董夫著，316 頁，B5 判，裳華房（1967 年）

この他に内山龍雄：一般相対性理論，裳華房 (1978) がある．前著の目次と比べると，ほとんど同じものが並んでいるが，内容は違っているものもある．しかし，初めての教科書として用いる場合，どちらの本を選んでもよいだろう．

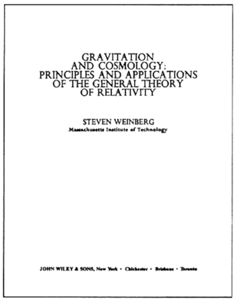
場の古典論



ランダウ・リフシッツ著，広重徹・恒藤敏彦訳，450 頁，A5 判，本体 3000 円，東京図書（1964 年）

エッセイ（左頁）で述べたことと裏腹だが，この本に含まれる他の主題，特に輻射の理論は光学の基礎でもあり，それ自体極めて価値の高い教科書である事も付言しておきたい．また英語版 “The Classical Theory of Fields” (Addison-Wesley, 1951) は世界中で読まれており，この本を読んでおく一つの利点ともなろう．

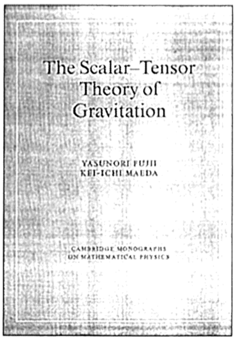
Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity



S. Weinberg, 657 頁，17 cm×23 cm，John Wiley & Sons (1971)

副題名通り，基本的な原理と数学的議論の他に，物理学あるいは天文学への応用として膨大な数の話題が取り上げられていて，現在でも具体的な取組みの際に十分な基礎を与えてくれる．ただ，私の現在の立場から見ると，宇宙定数や Brans–Dicke 理論の部分が不十分のように思われる．

The Scalar–Tensor Theory of Gravitation

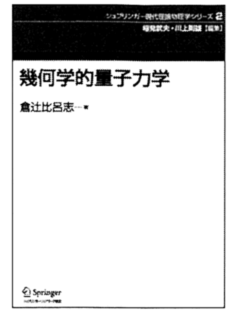


Y. Fujii and K. Maeda, 240 頁，18 cm×25 cm，Cambridge University Press (2003)

最近の話題となっている加速宇宙は宇宙定数問題の現代版でもあり，純粋な一般相対論からの拡張が示唆されていて，スカラー・テンソル理論はその出発点となると期待される．しかしそのためにも，Weinberg の本とは異なって，やはりラグランジアンから出発して正確な議論を積み重ねることが重要で，それがこの本の目的である．

書評

幾何学的量子力学



倉辻比呂志著，A5 版，406 頁，本体 5200 円，シュプリンガー・フェアラーク東京

これは倉辻さんの 2 冊目の本である．前作が教科書風なのに対して，今度は自分の研究人生の総括を目指した本である．11 章からなり，付録が 5 つで約 400 ページもあり，簡単に解説することは容易でない．そこでまず本全体の背後にある倉辻さんの考え方を見てゆこう．

彼は，日本人で経路積分にコヒーレント状態を応用した最初かまたはそれに近い研究者として知られている．コヒーレント状態は量子光学のエッセンスであり，それを発見して量子光学に多大の貢献をしたグラウバー氏（R.J. Glauber）が昨年ノーベル物理学賞を受賞したことは記憶に新しい．ここで読者の迷惑（？）も承知でコヒーレント状態の厳密な説明をしよう（この本の中心をなす概念なので）．$a^\dagger$ と a を調和振動子の生成および消滅演算子とする，すなわち $[a, a^\dagger] = \mathbf{1}$，そして $\mathcal{F}$ を $\{a^\dagger, a, \mathbf{1}\}$ より生成されるフォック空間とする．$|z\rangle \in \mathcal{F}$ ($z \in \mathbf{C}$ はパラメータ) に対して次の 3 条件は同値である（本の 4 章参照）．

$$a|z\rangle = z|z\rangle \quad \text{and} \quad \langle z|z\rangle = 1, \tag{1}$$

$$|z\rangle = \mathrm{e}^{-|z|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \tag{2}$$

$$|z\rangle = \mathrm{e}^{za^\dagger - \bar{z}a} |0\rangle. \tag{3}$$

ここに $|0\rangle$ は真空である（$a|0\rangle = 0$）．なぜこれが重要か？ 実はコヒーレント状態 $|z\rangle$ は不確定性原理 $\Delta\hat{q}\Delta\hat{p} \geq \frac{\hbar}{2}$ において丁度 $\Delta\hat{q}\Delta\hat{p} = \frac{\hbar}{2}$ を与える．すなわち，古典にもっとも近い量子状態なのである．それゆえ，これを用いれば準古典近似が大変見通しの良いものとなる．コヒーレント状態を経路積分に応用して，準古典近似でいろいろな量を抜き出すことは自然で，非常に有効な方法なのである．倉辻さんたち（例えば，倉辻・鈴木，倉辻・飯田）は一般の場合にこのことを実行して，この本の基礎になったよく知られている論文を書いた（4 章および 5 章の脚注参照）．

リー代数 $su(2)$ および $su(1,1)$ のスピン表現を構成することは，シュウィンガーのボゾン構成としてよく知られている．2 つの調和振動子 $\{a^\dagger, a\}$, $\{b^\dagger, b\}$ を用いて生成元は，各々

$$J_+ = a^\dagger b, \quad J_- = ab^\dagger, \quad J_3 = (a^\dagger a - b^\dagger b)/2,$$
$$K_+ = a^\dagger b^\dagger, \quad K_- = ab, \quad K_3 = (a^\dagger a + b^\dagger b + \mathbf{1})/2$$

となる（本の 4 章．ただし，記号を変えている）．フォック空間 $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}$ に制限を加えることによって，$su(2)$ および $su(1,1)$ のスピン表現を得ることができ，更にスピン・コヒーレント状態を構成するのは容易である．ここで重要な注意を加えておこう．コヒーレント状態をリー代数に拡張する場合，それは**一意的ではない**ということである．すなわち，上述の (1) を拡張する（Barut–Girardello type）のか，または (3) を拡張する（Perelomov type）のかで（一般化された）コヒーレント状態は異なるのである．(1) と (3) のパラメータ z の住む多様体が異なってくる（本の 4 章参照）．この本では後者のスピン・コヒーレント状態が縦横無尽に駆使されており，倉辻さんの得意とするところであろう．

次に本の内容を見てゆこう．2 章が経路積分の入門で，3 章，4 章，5 章がそれぞれ準古典量子化理論，コヒーレント状態と量子変分原理，幾何学的位相となっている．これらがこの本の主要部分である．6 章から 10 章がこれらの "応用" で，位相不変量と輸送係数の量子化，ゲージ場のアノマリー，量子凝縮体における位相欠陥，量子ホール流体における素励起，準古典量子化の非線型場への応用と実に多岐にわたっている．11 章が補遺で 3 つのトピックスがある．

経路積分を具体的に計算することはほとんど不可能で何らかの近似計算が必要になる．この本では準古典近似が中心となる．また 5 章の幾何学的位相で，量子断熱近似とそれに付随して起こる幾何学的位相因子（ベリー（M.V. Berry）の位相と言われる）が詳しく議論されている．数学的には位相空間（phase space）上のある主バンドルのホロノミーのことである．断熱近似と幾何学的位相で興味深いことは，これが量子力学や場の理論でかなり普遍的なものであるということである（175 ページのコメントが面白い）．私にはこれが**繰り込み群の方法**と似ているように思われる．

最後に辛口のコメントで締めくくろう．全体的にミスプリントが多く，章によっては記号が統一されていない．若い読者のためにも早急な訂正を望む．

藤井　一幸（横浜市立大学国際総合科学部）

第2回 a primer of Probability

使うための確率論入門

待ち時間のパラドックス

渡 辺 浩

ランダムに来るバスは，規則正しく来るバスよりも，待ち時間が長くなる——今回は「待ち時間のパラドックス」を取り上げます．数学的には，ポアソン分布と指数分布の期待値に関係する問題です．

Theme バスの待ち時間

自宅付近の停留所に無作為に行くと，バスが来るまで平均して 10 分待たなければならないことが分かった．待ち時間が 10 分なら，バスは 20 分に 1 本来ていると考えたい．しかし時刻表によると，10 分に 1 本の頻度で運行していることになっている．交通渋滞でダイヤはかなり乱れているようだが，どうも腑に落ちない[1)]．

2.1 期待値

「期待値」とは，ランダムに変化する量の‘平均的な値’を数学的に定式化したものである．

まず，**離散分布**する確率変数 X を考える．すなわち，高々可算な実数の集合 A があり（例えば，集合 $\{1,2,3,4,5,6\}$ や，0 以上の整数全体の集合 $\mathbb{Z}_+$ など），確率変数 X が値 $x\in A$ を取る確率を $p(x)$ として，

$$\sum_{x\in A} p(x)=1 \tag{2.1}$$

が成り立つとする．このとき，

$$\mathrm{Exp}[X]=\sum_{x\in A} xp(x)$$

を X の**期待値**と言う．ただし，右辺が無限級数のときには，それが絶対収束

することを仮定する．

例 2.1　確率分布

$$p(k) = \frac{\nu^k}{k!}e^{-\nu}\ , \quad k = 0, 1, 2, \cdots \tag{2.2}$$

に従う確率変数 K を考える．ただし ν は正の定数である．$A = \mathbb{Z}_+$ として (2.1) の条件が満たされることは，指数関数の Taylor 展開

$$e^\nu = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\nu^k}{k!}$$

を用いると分かる．そして K の期待値は

$$\mathrm{Exp}[K] = \sum_{k=0}^{\infty} kp(k) = \nu e^{-\nu} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!}\nu^{k-1} = \nu \tag{2.3}$$

となる．確率分布 (2.2) を**ポアソン分布**と言う．　◇

また**連続分布**する確率変数 X の場合，その密度関数を $f(x)$ として，

$$\mathrm{Exp}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

を X の**期待値**と言う．ただし，右辺の積分が絶対収束することを仮定する．

例 2.2　区間 $[0, h]$ に一様分布する確率変数 T の期待値は

$$\mathrm{Exp}[T] = \int_0^h t\frac{1}{h}dt = \frac{h}{2}$$

である．これは，h（時間）ごとに正確に来るバスの場合，無作為に停留所に行くときの平均の待ち時間は $\frac{h}{2}$（時間）であることを意味する．　◇

例 2.3　指数分布

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \tag{2.4}$$

に従う確率変数 T の期待値は

$$\mathrm{Exp}[T] = \int_0^{\infty} t\lambda e^{-\lambda t}dt = \frac{1}{\lambda} \tag{2.5}$$

である．(2.5) は，今回の議論において基本となる事実である．　◇

期待値は，次の意味で線形性を持つ．

定理 2.1　確率変数 X, Y に対し，

$$\mathrm{Exp}[\alpha X + \beta Y] = \alpha \mathrm{Exp}[X] + \beta \mathrm{Exp}[Y] \tag{2.6}$$

が成り立つ[傍注1]．ただし，α, β は定数である．　◇

(2.6) を示すために，X, Y の**同時確率分布**を考える．離散分布の場合につい

［傍注1］ (2.6) の左辺の意味を確定するには，本来 $\alpha X + \beta Y$ の確率分布を定める必要があるが，以下に述べるように同時確率分布を用いることもできる．そして両者の同等性を示すことも難しくない．

て言えば，同時確率分布は

$$p(x,y)=\mathrm{Prob}[X=x \text{ かつ } Y=y]$$

で定義され，X,Y の単独での確率分布 $p_X(x), p_Y(y)$ と次のような関係にある．

$$p_X(x)=\sum_y p(x,y)\ ,\quad p_Y(y)=\sum_x p(x,y).$$

これを用いれば，

$$\begin{aligned}\mathrm{Exp}[\alpha X+\beta Y]&=\sum_{x,y}(\alpha x+\beta y)p(x,y)=\alpha\sum_x xp_X(x)+\beta\sum_y yp_Y(y)\\&=\alpha\mathrm{Exp}[X]+\beta\mathrm{Exp}[Y]\end{aligned}$$

寄り道　離散分布でもなく連続分布でもないという確率分布も存在するので，右のように両者を併記する扱い方は便宜的なものである．‘すべての’ 確率分布を統一的に扱うためには，「測度論」の枠組みを用いて確率論を定式化する必要があるが，私たちは当面，離散分布と連続分布だけを扱う．

のようにして (2.6) が示される．また連続分布の場合は，

$$\mathrm{Prob}[x_1\le X\le x_2 \text{ かつ } y_1\le Y\le y_2]=\int_{x_1}^{x_2}dx\int_{y_1}^{y_2}dy\ f(x,y)$$

で定まる**同時密度関数** $f(x,y)$ と，X,Y の密度関数 $f_X(x), f_Y(y)$ との関係

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy\ ,\quad f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx$$

を用いればよい．

2.2 待ち時間

前節の例 2.2 で示したように，バスが正確に h（時間）ごとに来るなら，無作為に停留所に行くときの待ち時間の期待値は $\frac{h}{2}$（時間）である．それでは，バスが正確に来ない場合はどうだろうか．この問題を考えるために，前回の「航空事故の統計」での考察と同様に，**完全にランダム**に来るバスを考えることにする．すなわち，バスの ‘来やすさ’ はいつも同じであって（一様性），過去の履歴に依存しない（独立性）とする．このとき，時刻 τ から停留所でバスを待つとすると，$t>0$ に対し，

$$\text{区間 } [\tau,\tau+t] \text{ にバスが来ない確率}=e^{-\lambda t}, \tag{2.7}$$

$$\text{区間 } [\tau+t,\tau+t+\varDelta t] \text{ にバスが来る確率}=\lambda\varDelta t \tag{2.8}$$

のように表せる．ただし λ は正の定数，$\varDelta t$ は正の微小量である．そして独立性の仮定の下で，(2.7), (2.8) から，

$$\text{区間 } [\tau+t,\tau+t+\varDelta t] \text{ に初めてバスが来る確率}=e^{-\lambda t}\lambda\varDelta t \tag{2.9}$$

を得る．(2.9) は，待ち時間 T が $t\le T\le t+\varDelta t$ を満たす確率を与えるから，T は密度関数 (2.4) を持つことが分かる．したがって (2.5) より，

$$\mathrm{Exp}[T]=\frac{1}{\lambda} \tag{2.10}$$

となる．特に待ち時間 T の期待値は観察の始点 τ の取り方によらないことが分かるが，さらに次のような問題を考えると，待ち時間の奇妙な性質が浮き彫りになる．時刻 0 から観察を始めたとして，バスの到着時刻を順に $s_1, s_2, \cdots$ とする．（$s_1, s_2, \cdots$ は確率変数となる．）このとき，s_j を始点とみなして (2.9) を得る議論を繰り返すと，定数 $t > 0$ に対し，

$$[s_j, s_j + t] \text{ に } j+1 \text{ 番目のバスが来ない確率} = e^{-\lambda t},$$
$$[s_j + t, s_j + t + \Delta t] \text{ にバスが来る確率} = \lambda \Delta t.$$
$$\therefore \quad [s_j + t, s_j + t + \Delta t] \text{ に } j+1 \text{ 番目のバスが来る確率} = e^{-\lambda t}\lambda \Delta t \tag{2.11}$$

となる．(2.11) は，$t \leq s_{j+1} - s_j \leq t + \Delta t$ が成立する確率を与えるから，$s_{j+1} - s_j$ は指数分布 (2.4) に従うことが分かる．よって，

$$\mathrm{Exp}[s_{j+1} - s_j] = \frac{1}{\lambda} \tag{2.12}$$

となる．すなわち，1 台バスが来てから次の 1 台が来るまでの時間の期待値は $\frac{1}{\lambda}$ であり，この値は，任意の時刻 τ を始点とした待ち時間 T の期待値 (2.10) と等しい．これはちょっと奇妙な感じがするが，誰かが繰返しサイコロを振っているとして，どの時点からそれを観察し始めても，最初に 1 が出るまでの待ち時間は同じであるということを考えれば納得できるだろうか．

2.3 バスが来る頻度

正確に等間隔に来るバスの待ち時間と，完全にランダムに来るバスの待ち時間を比較するには，バスが来る頻度を共通の値に設定しなければならない．

そこで，2.2 節で考えた完全にランダムに来るバスについて，その頻度を λ を用いて表す．時刻 0 から観察を始めたとして，バスの到着時刻を順に $s_1, s_2, \cdots$ とし，区間

$$I_j = [s_j, s_{j+1}]\ , \quad j = 0, 1, 2, \cdots \tag{2.13}$$

を考える．ただし，$s_0 = 0$ とする．すると (2.10), (2.12) より，I_j の長さ $|I_j| = s_{j+1} - s_j$ の期待値は，$j = 0$ の場合を含めて

$$\mathrm{Exp}[|I_j|] = \frac{1}{\lambda}\ , \quad j = 0, 1, 2, \cdots \tag{2.14}$$

となる．そこで 定理 2.1 を繰返し用いると，

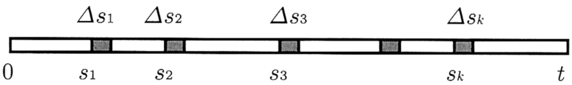
$$\mathrm{Exp}\left[\sum_{j=0}^{k-1} |I_j|\right] = \sum_{j=0}^{k-1} \mathrm{Exp}[|I_j|] = \frac{k}{\lambda}\ , \quad k = 1, 2, \cdots$$

が得られ，バスが k 台来るのに要する時間は平均 $\frac{k}{\lambda}$ であることが分かる．

また，バスが来る頻度を求める方法として，次のようなアプローチもある．

時間 $[0,t]$ にバスが k 台来る確率 $p(k)$ を求める．時刻 0 から観察を始めたとして，

> 最初のバスが $[s_1, s_1+\Delta s_1]$ に，次のバスが $[s_2, s_2+\Delta s_2]$ に，$\cdots$，k 番目のバスが $[s_k, s_k+\Delta s_k]$ に来て，それ以降時刻 t までバスが来ない



ということが起きる確率は，(2.7)–(2.9) の考え方および独立性の仮定から，

$$e^{-\lambda s_1}\lambda\Delta s_1 \times\ e^{-\lambda(s_2-s_1)}\lambda\Delta s_2 \times\cdots\times e^{-\lambda(s_k-s_{k-1})}\lambda\Delta s_k \times e^{-\lambda(t-s_k)}$$
$$= \lambda^k e^{-\lambda t}\Delta s_1\Delta s_2\cdots\Delta s_k \qquad (2.15)$$

となる．ここで，$s_1, s_2, \cdots, s_k$ は，条件

$$0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_{k-1} < s_k < t \qquad (2.16)$$

を満たす任意の数である．したがって $p(k)$ は，(2.16) の範囲における $s_1, s_2, \cdots, s_k$ についての積分として表すことができ，

$$p(k) = \int_0^t ds_k \int_0^{s_k} ds_{k-1}\cdots\int_0^{s_3} ds_2 \int_0^{s_2} ds_1 \lambda^k e^{-\lambda t}$$
$$= \frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}\ , \qquad k = 0, 1, 2, \cdots \qquad (2.17)$$

となる[傍注2]．これは，ポアソン分布 (2.2) において $\nu = \lambda t$ としたものであり，(2.3) を用いると，k の期待値，すなわち時間 $[0,t]$ に来るバスの台数の期待値は λt となる．これは，バスが k 台来るのに要する時間は平均 $\frac{k}{\lambda}$ であるという前述の結果と符合する．

［傍注２］ (2.13) における $s_1, s_2, \cdots$ は確率変数であるが，(2.15)–(2.17) における $s_1, s_2, \cdots, s_k$ は確率変数が取る値を表す．（k も確率変数が取る値である．）本来，確率変数とそれが取る値には別の記号を当てるべきだが，繁雑になるのでこのような'記号の濫用'をした．

結局，ランダムに来るバスの頻度は，単位時間当たり λ 台であると言える．そして (2.10) に示されるように，このバスの平均の待ち時間は $\frac{1}{\lambda}$ である．一方，同じ頻度で等間隔に（正確に $\frac{1}{\lambda}$ 時間ごとに）来るバスの平均の待ち時間は $\frac{1}{2\lambda}$ であるから，ランダムに来るバスの平均の待ち時間のほうが長いことが分かる．

2.4 区間の長さ

それでは，ランダムに来るバスの平均の待ち時間はなぜ長くなるのだろうか．(2.14) に示される通り，どの区間も長さの期待値は $\frac{1}{\lambda}$ である．とすれば，やはりランダムに来るバスの平均の待ち時間は $\frac{1}{2\lambda}$ となるのではなかろうか．これがすなわち，待ち時間のパラドックスである．

まず次のことに注意する．(2.14) を得る議論では，あらかじめ j を固定して区間 I_j の長さを考えたのだが，無作為に停留所に行くとすれば，停留所に着く

時刻 τ は，$I_1, I_2, \cdots$ のどの区間に属するか確定していない．実際 τ は，短い区間よりも長い区間の中に落ちる可能性が高いだろう．直観的には，区間の長さが互いに異なるとき各区間は等確率で選ばれず，長い区間が選ばれやすいために，待ち時間が長くなると考えられるのである．

上記の効果を定量的に考察しよう．(2.13) のように無限個の区間を並べてしまうと，τ が区間 I_j に属する確率を定めるのに困るので，初めは (2.16) のように有限区間 $[0,t]$ に限定して，到着するバスの台数を k，到着時刻を $s_1, s_2, \cdots, s_k$ とし，最後に $t \to \infty$ の極限を取ることにする．($k, s_1, s_2, \cdots, s_k$ は確率変数となる．)

さて，τ は $k, s_1, s_2, \cdots, s_k$ と独立に区間 $[0,t]$ 上に一様分布するものとして，τ が区間 I_j に属する確率は

$$\frac{|I_j|}{t} = \frac{s_{j+1} - s_j}{t}, \quad j = 0, 1, 2, \cdots, k$$

で与えられると考える．ただし $s_{k+1} = t$ である．以下において，τ が属する区間を I_* と書く．確率 (2.15) を用いると，I_* の長さ $|I_*|$ の期待値は，

$$\begin{aligned}\mathrm{Exp}[|I_*|] = &\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} \int_0^t ds_k \int_0^{s_k} ds_{k-1} \cdots \int_0^{s_3} ds_2 \int_0^{s_2} ds_1 \\ &\times \lambda^k e^{-\lambda t} \frac{s_{j+1} - s_j}{t} (s_{j+1} - s_j)\end{aligned}$$

のように表せる．そこで $j \geq 1$ に対し，

$$\begin{aligned}\int_0^{s_{j+1}} ds_j \cdots \int_0^{s_3} ds_2 \int_0^{s_2} ds_1 (s_{j+1} - s_j)^2 &= \int_0^{s_{j+1}} ds_j \frac{s_j^{j-1}}{(j-1)!} (s_{j+1} - s_j)^2 \\ &= \frac{2 s_{j+1}^{j+2}}{(j+2)!}\end{aligned}$$

が成り立つことを用いると，

$$\begin{aligned}\mathrm{Exp}[|I_*|] &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} \int_0^t ds_k \int_0^{s_k} ds_{k-1} \cdots \int_0^{s_{j+2}} ds_{j+1} \lambda^k e^{-\lambda t} \frac{2 s_{j+1}^{j+2}}{(j+2)!\, t} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} \lambda^k e^{-\lambda t} \frac{2 t^{k+1}}{(k+2)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k e^{-\lambda t} \frac{2 t^{k+1} (k+1)}{(k+2)!}.\end{aligned}$$

さらに $k + 1 = (k+2) - 1$ として，k に関する和を分割して，

$$\begin{aligned}\mathrm{Exp}[|I_*|] &= \frac{2}{\lambda} e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{k+1}}{(k+1)!} - \frac{2}{\lambda^2 t} e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{k+2}}{(k+2)!} \\ &= \frac{2}{\lambda} e^{-\lambda t} (e^{\lambda t} - 1) - \frac{2}{\lambda^2 t} e^{-\lambda t} (e^{\lambda t} - 1 - \lambda t) \\ &= \frac{2}{\lambda} \left(1 - \frac{1}{\lambda t} + \frac{1}{\lambda t} e^{-\lambda t} \right) \underset{t \to \infty}{\to} \frac{2}{\lambda}\end{aligned}$$

を得る．この結果は，無作為に選んだ区間の長さの期待値は $\frac{2}{\lambda}$ であることを意味し，完全にランダムに来るバスの平均の待ち時間が $\frac{1}{\lambda}$ になるという事実と整

合的である．

2.5 放射性物質の崩壊

2.3 節で示したように，完全にランダムに起きる現象があるとき，一定の時間内にその現象が起きる回数はポアソン分布に従う．このような物理現象の例として，α 崩壊に関するラザフォードとガイガーの計測実験を見てみよう[2)]．表 2.1 は，ポロニウムが放出する α 線の数を計測した結果である．7.5 秒ずつ時間を区切り，各時間区間の中で観測された α 線をカウントし，k 回カウントした時間区間の数を r_k としている．k は 0 から 14 まで分布しており，時間区間の総数は

$$r = \sum_{k=0}^{14} r_k = 2608, \tag{2.18}$$

崩壊総数は

$$n = \sum_{k=0}^{14} k r_k = 10097 \tag{2.19}$$

である．

1910 年当時，「放射性物質の崩壊は偶然に（完全にランダムに）起きる」という仮説はよく知られており，様々な検証実験が試みられていた．ラザフォードたちの実験もその一つとして位置づけられるが，特に彼らは，崩壊数 k の揺らぎが（一見計測器の性能不良を疑わせるほど[3)]）大きいことを強調し，「崩壊数の分布が確率論の法則に合致しているかどうか確かめることは重要である」と述べている．さて，「放射性物質の崩壊は偶然に起きる」という仮説が正しいとすれば，崩壊数 k はバスの頻度と同様にポアソン分布 (2.17) に従うはずである．そこで実験データから λt の値を定めることを考える．(2.18), (2.19) より，1 区間（7.5 秒）あたりの平均崩壊数は $\frac{n}{r} = 3.87$ であり，この値が，ポアソン分布 (2.17) に従う確率変数の期待値 λt の実験値を与える．そこで，(2.17) において $\lambda t = 3.87$ とした分布と実験データの $\frac{r_k}{r}$ を比較してみると，図 2.1 のようによく合う．放射性物質の崩壊は完全にランダムに起きるという仮説の正しさは，十分な確かさで立証されたと言える[4)]．

寄り道　ラザフォードとガイガーは，放射性物質の崩壊がなぜ偶然に起きるのかという理論的な問題については深く追求していない．現代では，量子力学に従う微視的な粒子が，観測装置のような巨視的な系と相互作用するとき，観測装置による観測結果や微視的な粒子が被る状態の変化について，確定的な予言をすることは原理的に不可能であり，このような系においては因果律が破れるとされる．量子力学のこのような確率論的性格をアインシュタインが執拗に攻撃したことは広く知られているが[5)]，この問題は現在もまだ完全には解決していない．

表 2.1　ラザフォード，ガイガーによる α 線の計測実験の結果．

k	0	1	2	3	4	5	6	7
r_k	57	203	383	525	532	408	273	139
$\frac{r_k}{r}$	0.02186	0.07784	0.14686	0.20130	0.20399	0.15644	0.10468	0.05330

k	8	9	10	11	12	13	14
r_k	45	27	10	4	0	1	1
$\frac{r_k}{r}$	0.01725	0.01035	0.00614	0.00153	0.00000	0.00038	0.00038

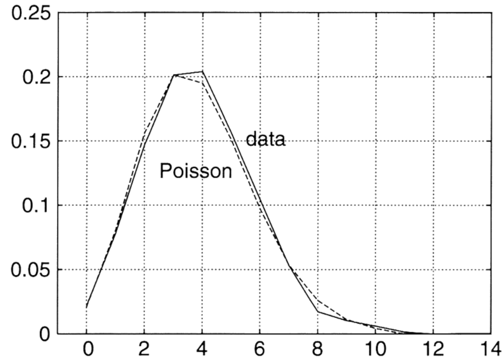


図 2.1　ラザフォード，ガイガーの実験データとポアソン分布．実線（data）は実験データ，点線（Poisson）は $\lambda t = 3.87$ のポアソン分布．

参考文献

1) 筆者はこの問題を服部哲弥先生に教えられた．
服部先生の web page `http://www.math.tohoku.ac.jp/~hattori/udai.htm` の『1995 年度講義録』には，バスを待つ実際の体験をもとにしたこの問題の分析が含まれている．

2) E. Rutherford, H. Geiger, *The Probability Variations in the Distribution of α Particles*, The London, Edinburgh and Dublin philosophical magazine and journal of science, Ser.6, 20:698–707, 1910. この論文の最後に，H. Bateman による数学的考察が付されている．

3) E. Rutherford, J. Chadwick, C.D. Ellis, *Radiations from radioactive substances*, Cambridge, 1930, P.171.

4) フェラーは有名な教科書，W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Volume I, Third Edition, John Wiley & Sons, 1968, の P.160 において，ラザフォードとガイガーのデータを χ^2 検定する問題に言及している．

5) アブラハム・パイス，西島和彦監訳，『神は老獪にして… アインシュタインの人と学問』，産業図書．

（わたなべ・ひろし，日本医科大学数学教室）

ゲーム理論講義

第2回

逐次消去均衡

船木 由喜彦

この回では，前回紹介した支配戦略の概念を基に，支配される戦略を逐次的に消去するプロセスを考察する．さらに，このプロセスにおいて残される戦略の組を求める方法とその性質を議論する．逐次消去の過程では相手の手を読むことが必要になり，相手の合理性に対する考慮と共有知識に関する仮定が必要である．さらに，それは非協力ゲームで最も有名な解であるナッシュ均衡の概念への序論となる．なお，ナッシュ均衡をもたらす戦略は強支配される戦略の逐次的な消去により，消去されることがないので，ここで紹介する方法によってナッシュ均衡の一つを求めることができる場合も多い．

2.1 逐次消去均衡

前回では，標準形ゲーム理論の解として戦略の間の支配関係を解説した．しかし，この議論を前提とすれば，自分がそのような行動原理に従って戦略を選択をするのであれば，当然，相手もそのような行動をすると考えても良さそうである．また，ゲーム理論の特徴は相手も自分と同様に合理的であるということであるから，そのように，相手も合理的な行動を取っていると仮定し，それを用いてより洗練された戦略を取ることを想定することが可能となる．このプロセスを**戦略の逐次消去**と呼ぶ．より厳密にこれを記述すると以下のようになる．

すべてのプレイヤーは自分の戦略の中から支配（または強支配）される戦略を削除する．これは前回も述べたように，彼らにとって，そのような戦略を取ることが他の戦略を取ることよりも利益になることはないからである．このように削除された戦略を取り除くことによって，縮小された標準形ゲームができる．さらに，このゲームにおいて，もう一度，全員にとって支配（または強支配）される戦略を削除する．このようなプロセスを続け，その結果として最終的に残された戦略の組を戦略の逐次消去による結果と呼ぶ．このプロセスにお

いては，一度消去された戦略は考察の対象にならないと仮定されていることに注意しよう．戦略の逐次消去による結果がただ一つの戦略の組になる場合がある．これを**逐次消去均衡**と呼ぶ．当然，強支配される戦略は同時に弱支配されるので，弱支配による逐次消去により残される戦略は強支配による逐次消去でも残される．また，強支配の逐次消去では，一度の消去のプロセスでは，消去の順番は関係ないが，弱支配の場合には消去の順番が関係する（2.2 節の議論参照）．ここでは，一度の消去プロセスにおいて，できる限り多く戦略を消去するものと仮定する．なお，強支配による逐次消去で逐次消去均衡が得られるのであれば，弱支配による消去の順番にも関係せず，同じ結果になる．もちろん，強支配均衡が存在すれば，支配される戦略は一度で削除されるので，それは，強支配による逐次消去均衡と一致する．

2.2 戦略の逐次消去とそのプロセス

それでは，この逐次消去のプロセスを前回の 2 人の商店主のゲームの例を用いて説明することにしよう．今回の利得行列は下記のように与えられているとする．設定できる価格は 110 円，150 円，200 円，300 円の 4 通りで同じである．すなわち，プレイヤー集合 $N = \{1, 2\}$，2 人の戦略の集合は $S_1 = S_2 = \{110\text{円}, 150\text{円}, 200\text{円}, 300\text{円}\}$ となる．今回の例では，各消費者には商店の好みがあり，110 円と 150 円のように価格差があったとしても基本的には，好みの商店で商品を購入するとする．すなわち，例えば商店 1 が 110 円，商店 2 が 150 円を付けた場合商店 1 は消費者の半分に 900 個を販売し利益が 9 千円となる．（これは前回で両者が 110 円の価格付けをしたときと同じである．）商店 2 はやはり消費者の半分に 160 個を販売し利益が 8 千円となる．（これも前回で両者が 150 円の価格付けをしたときと同じである．）同様にして利得行列の他の部分を説明することができる．しかし，片方が 110 円の価格を付け，他方が 200 円，300 円の価格を付けた場合と片方が 150 円の価格を付け，他方が 300 円の価格を付けた場合は異なっている．この場合，価格差が大きいので消費者がその大きな価格差から安いほうの商品の品質に不信感を抱き，あまり商品が売れず，利益が減少すると仮定している．そのため例えば商店 1 が 110 円を付け，商店 2 が 200 円を付けているときの利益はそれぞれ 3 千円，7 千円となっている．ここで，高い価格を付けたほうは前回の例で両者が 200 円を付けたときの利益と同じである．

表 2.1　2 人の商店主のゲーム（単位：千円）．

1＼2	110 円	150 円	200 円	300 円
110 円	(9, 9)	(9, 8)	(3, 7)	(0, 4)
150 円	(8, 9)	(8, 8)	(8, 7)	(3, 4)
200 円	(7, 3)	(7, 8)	(7, 7)	(7, 4)
300 円	(4, 0)	(4, 3)	(4, 7)	(4, 4)

このゲームにおいて戦略の逐次消去をしてみよう．初めに，このゲームは対称ゲームであることに注意する．また，戦略 200 円は戦略 300 円を強支配している．それ以外に支配関係はない．そこで，両プレイヤーは強支配される戦略を取り得ないものとして除去する．その結果，次の利得行列が導かれる．

表 2.2　1 段階目の逐次消去（単位：千円）．

1 ＼ 2	110 円	150 円	200 円
110 円	$(9, 9)$	$(9, 8)$	$(3, 7)$
150 円	$(8, 9)$	$(8, 8)$	$(8, 7)$
200 円	$(7, 3)$	$(7, 8)$	$(7, 7)$

この縮小された双行列ゲームにおいて，戦略 150 円は戦略 200 円を強支配している．それ以外の支配関係はない．そこで両プレイヤーは 200 円という戦略を取らないのでそれを除去する．その結果は次の双行列ゲームとなる．

表 2.3　2 段階目の逐次消去（単位：千円）．

1 ＼ 2	110 円	150 円
110 円	$(9, 9)$	$(9, 8)$
150 円	$(8, 9)$	$(8, 8)$

2 段階目に縮小された双行列ゲームにおいて，戦略 110 円は戦略 150 円を強支配している．その結果，両プレイヤーは戦略 150 円を取らず，結果的に残された戦略はそれぞれ 110 円のみとなり，（110 円，110 円）が逐次消去均衡となる．

さらに次のような仮想的な非対称双行列ゲームの例で逐次消去均衡を求めてみよう．$N = \{1, 2\}$，$S_1 = \{$戦略 a, 戦略 b, 戦略 c, 戦略 d$\}$，$S_2 = \{$戦略 a', 戦略 b', 戦略 c', 戦略 d'$\}$ である．

表 2.4　逐次消去均衡の例．

1 ＼ 2	戦略 a'	戦略 b'	戦略 c'	戦略 d'
戦略 a	$(10, 20)$	$(1, 10)$	$(1, 10)$	$(1, 10)$
戦略 b	$(20, 1)$	$(2, 20)$	$(2, 10)$	$(2, 10)$
戦略 c	$(1, 1)$	$(3, 2)$	$(3, 20)$	$(3, 10)$
戦略 d	$(0, 1)$	$(0, 2)$	$(4, 3)$	$(4, 4)$

まず，プレイヤー 2 の戦略同士で支配関係がないことを確認してほしい．プレイヤー 1 については戦略 b が戦略 a を強支配しているが，それ以外に支配関係はない．そこで，プレイヤー 1 は戦略 a を消去する．

残された戦略から作られた新たな 3 行 4 列の利得行列において，次にプレイヤーの戦略 b' が戦略 a' を強支配している．他に支配関係はない．（プレイヤー 1 に関しては前段階で強支配されるものを消去したのでこの段階で，戦略同士の強支配関係はあり得ない．）そこで，プレイヤー 2 の戦略 a' を消去する．さらに，残された戦略から作られた新たな 3 行 3 列の利得行列においてプレイヤー 1 の戦略 c は戦略 b を強支配，他の支配関係はない．したがってプレイヤー 1 の

戦略bを消去する．続いて，新たに作られた2行3列の双行列においてプレイヤー2の戦略c'が戦略b'を強支配するので戦略b'を消去する．さらにこの新たな2行2列の利得行列においてプレイヤー1の戦略dは戦略cを強支配するので戦略cを消去する．新たな1行2列の利得行列においてプレイヤー2の戦略d'は戦略c'を強支配し，戦略c'を消去する．その結果，(戦略d, 戦略d') が逐次消去均衡となる．パレート最適である (戦略a, 戦略a') が最初に消去され，逐次消去均衡の与える利得はそれよりもずいぶん小さいことに注意してほしい．

次に弱支配による逐次消去のプロセスを例示しよう．

表2.5　逐次消去均衡の例．

1＼2	戦略a'	戦略b'	戦略c'	戦略d'
戦略a	$(10,10)$	$(10,5)$	$(10,5)$	$(5,20)$
戦略b	$(15,5)$	$(10,10)$	$(10,0)$	$(5,0)$
戦略c	$(0,5)$	$(15,5)$	$(10,10)$	$(5,0)$
戦略d	$(20,0)$	$(0,0)$	$(15,0)$	$(5,5)$

この例では，弱支配戦略によって次の順番で戦略が消去される．戦略a→戦略a'→戦略b→戦略b'→戦略c→戦略c'．この結果，(戦略d, 戦略d') が逐次消去均衡となる．読者自ら確かめていただきたい．

次の利得行列は表2.5において (戦略d, 戦略d') の利得だけを変更したものである．この場合，残された戦略はプレイヤー1は戦略c, 戦略d，プレイヤー2は戦略c', 戦略d' である．これ以上の消去ができないことを確認していただきたい．

表2.6　逐次消去均衡の例．

1＼2	戦略a'	戦略b'	戦略c'	戦略d'
戦略a	$(10,10)$	$(10,5)$	$(10,5)$	$(5,20)$
戦略b	$(15,5)$	$(10,10)$	$(10,0)$	$(5,0)$
戦略c	$(0,5)$	$(15,5)$	$(10,10)$	$(5,0)$
戦略d	$(20,0)$	$(0,0)$	$(15,0)$	$(0,10)$

弱支配戦略による逐次消去では，消去の順が残される戦略の組に影響する．例えば次の例では，プレイヤー1から消去を始めると (戦略a, 戦略a') (戦略a, 戦略b') が残り，プレイヤー2から始めると (戦略a, 戦略a') (戦略b, 戦略a') が残る．両プレイヤー同時に始めると (戦略a, 戦略a') だけが残り，それが逐次消去均衡となる．

表2.7　戦略の逐次消去に関する注意．

1＼2	戦略a'	戦略b'
戦略a	$(9,9)$	$(9,9)$
戦略b	$(9,9)$	$(8,8)$

このような例や注意点については船木[2]を参照していただきたい．逐次消去の議論は，Gibbons[3], Dutta[1]にも詳しい．Osborne and Rubinstein[5]の合理

化戦略（Rationalizable strategy）はこの概念と関係が深い．

2.3 戦略の逐次消去と共有知識の仮定

逐次消去における，プレイヤーの思考プロセスを表 2.4 の例において考察してみよう．プレイヤーは戦略 b が戦略 a を強支配するという事実から戦略 a を取らない．次にプレイヤー 2 は「プレイヤー 1 は戦略 b が戦略 a を強支配するという事実から戦略 a を取らない」ということを合理的に推測して，その条件の下で戦略 b' が戦略 a' を強支配するという事実から，戦略 a' を取らない．すなわち，この場合，プレイヤー 2 はプレイヤー 1 が合理的なプレイヤーであることを知り，それを前提として，戦略の選択を考察している．

次にプレイヤー 1 は，「プレイヤー 2 が「プレイヤー 1 は戦略 a を取らない」ということから，その条件の下で戦略 a' を取らない」という推測を基に，その条件の下で戦略 c が戦略 b を強支配するので戦略 b を取らない．この場合，プレイヤー 1 は，「プレイヤー 2 がプレイヤー 1 が合理的なプレイヤーであることを知っている」ということを知っており，それを前提として，戦略の選択を考察している．

さらに，この議論を続けていくと，プレイヤー 2 は，「プレイヤー 1 が「プレイヤー 2 がプレイヤー 1 が合理的なプレイヤーであることを知っている」ということを知っている」ということを知っているので戦略の逐次消去を続け，戦略 b を消去することになる．すなわち，この段階で戦略の消去と同時に他人の合理性に対する推論を 3 段階使っている．この例において逐次消去均衡 (戦略 d, 戦略 d') を得るためには，5 段階の推論を行うことになる．したがって，この推論を行うためには単に相手が合理的であることを知るだけでは不十分である．相手が自分が合理的であることを理解していることが必要である．より深い逐次消去のためにはさらに深い知識と推論に関する仮定が必要である．

以上は有限段階の合理性に対する推論の仮定であるがゲーム理論では一般に無限段階の合理性の推論が可能であることを仮定して議論を行う場合が多い．このような知識の仮定は**共有知識の仮定**と言う．すなわち，プレイヤー 1 とプレイヤー 2 は互いに合理的であることが共有知識となっている．より正確に述べると，プレイヤー 1 と 2 は自分が合理的であり，相手が合理的であることを知っており，相手が「自分が合理的であること」を知っており，…という仮定が無限に続くことになる．さらに，この合理性の考察の背後にはプレイヤーが自分の戦略や利得のみならず相手の利得や戦略を知っていることも前提となる．すなわち，プレイヤーは互いの戦略や利得に関して共有知識を持っていることを仮定しなければならない．

n 人ゲームの場合は各段階において，他のすべての人がそのことを知っていると仮定して議論を進める必要がある．すなわち，ある事象が共有知識であるとは，その事象をすべての人が知り，そのことをすべての人が知り…と無限段階の過程が必要となる．この議論については岡田[4]や Osborne and Rubinstein[5]

を参考にしてほしい．

2.4 美人コンテストゲームと複占市場ゲーム

この節では美人コンテストゲームと複占市場ゲームの 2 つの例を挙げ，そこに逐次消去の概念を応用して得られる結果を考察しよう．

美人コンテストゲームは次のようなゲームである．n 人のプレイヤーがおり，彼らは 1 から 100 の整数を選択する．このとき，全員の平均の $\frac{3}{4}$ に最も近い整数を選んだものが賞金を獲得する．もし，最も近いものが複数以上いる場合は，その人たちで賞金を均等に分配する．これは美人コンテストの投票で，優勝する人を予想するには，自分が美人と思う人よりも，他の人の投票しそうな人を予測して選ぶ必要があり，そのとき，他の人も自分と同じように他の人が投票しそうな人を予想しているという構造を持つことに由来する．しかしながら，ここで述べたゲームでは平均よりも少ない数が目標となるので注意していただきたい．このゲームは次のように定式化される．プレイヤー集合が $N=\{1,2,\cdots,n\}$，戦略集合が $S_i=\{0,1,\cdots,100\},(i\in N)$，利得関数が $f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$ if $i\notin K$, $\frac{1}{|K|}$ if $i\in K$ で与えられる．ただし，$K=\{i\in N|\,|\frac{3}{4}\sum_{j\in N}x_j-x_i|\leq|\frac{3}{4}\sum_{j\in N}x_j-x_k|\ \ \forall k\in N\}$ である．

各プレイヤーが目標とする平均値の $\frac{3}{4}$ の数を目標数と呼ぼう．各プレイヤーが様々な数を選んだ場合，平均値はどのようになるであろうか．すべての人が最高値 100 を選んだ場合の平均値は 100 であるので目標値はその $\frac{3}{4}$ であるから，75 以下にしかならない．すなわち，75 より大きな数を選ぶ戦略は 75 に支配される．皆がこのように戦略を取るのであれば，支配される戦略は除去され，次の段階に進む．全員が 1 から 75 の範囲で戦略を取るとすると，全く同様な考え方から $75\times\frac{3}{4}=56.25$ より 57 以上の整数は 56 に支配される．以下この議論を繰り返していくと最後には 0 のみが残る．すなわち，このゲームの逐次消去均衡は全員がゼロを取ることである．

なお，戦略の集合を実数に拡張しても議論はほとんど同じである．このとき，無限段階の推論が必要であるが，0 以外の戦略はすべて支配関係で消去され，0 だけがそれを支配する戦略がないことを確認して欲していただきたい．結局，この場合も全員が 0 を取る戦略の組が逐次消去均衡である．

続いて，逐次消去均衡の概念を複占市場における企業の行動に応用してみよう．プレイヤーは 2 つの企業 1,2 であり，プレイヤー集合を $N=\{1,2\}$ と表すことにする．企業の持つ戦略は生産量を決定することであり，$S_1=S_2=\{x\in\Re|x\geq 0\}$ とする．企業 1, 2 が生産量 x_1,x_2 を選んだとき企業の生産物 1 単位あたりの生産に必要な費用は，投入する原料や資源などのコスト $c(c>0)$ であり，その結果，各企業の支出は cx_1,cx_2 となる．一方，企業の生産物の販売による収入は市場の逆需要曲線 $p=\max(a-x_1-x_2,0),(a>c)$ により定まるものとする．すなわち，両企業が x_1,x_2 の量の生産物を生産して市場に供給するとその結果定まる商品の価格は p である．したがって企業 1,2 はそれぞれ，

次の式で表される利潤 f_1, f_2 を得る．ここで，$k = a - c$ としている．

$$f_1(x_1, x_2) = \max(px_1 - cx_1, 0) = \max((k - x_1 - x_2)x_1, 0),$$

$$f_2(x_1, x_2) = \max(px_2 - cx_2, 0) = \max((k - x_1 - x_2)x_2, 0).$$

企業の利潤関数を利得関数とすると2人ゲーム $(N, S_1 \times S_2, (f_1, f_2))$ ができる．このゲームは**複占市場ゲーム**と呼ばれることがあり，ミクロ経済学の生産理論では標準的な設定である．

それでは，このゲームにおいて第1段階で残される戦略を調べよう．プレイヤーは対称であるので，企業1の戦略を分析する．まず，$x_1 > k$ とすると，常に企業1の利得は0になる．ある戦略の組に対して正の利得を与える企業1の戦略が存在するので，$x_1 > k$ という戦略はすべて支配される．$0 \leq x_1 \leq k$ を満たす戦略に対して $x_1 \in (\frac{k}{2}, k]$ は $[0, \frac{k}{2})$ に属するある戦略によって支配されることを示そう．実際，戦略 $x_1 = k - t, (t \in [0, \frac{k}{2}))$ は，戦略 $x_1 = t$ に支配されている．$(k - t - x_2)t - (k - (k - t) - x_2)(k - t) = (k - 2t)x_2$ であるから，$(k - t - x_2)t > 0$ のとき，$f_1(t, x_2) - f_1(k - t, x_2) \geq (k - 2t)x_2 > 0$ となる．また，$(k - t - x_2)t \leq 0$ のとき，$(k - (k - t) - x_2)(k - t) \leq 0$ となるから，$f_1(t, x_2) - f_1(k - t, x_2) = 0$ である．したがって第1段階で消去された残りの戦略の範囲は $[0, \frac{k}{2}]$ となる．企業2についても同様に，残された戦略の範囲は $[0, \frac{k}{2}]$ となる．

次の段階の消去を考えよう．残された戦略に対し企業1の戦略 $x_1 = t \in [0, \frac{k}{4})$ は $(\frac{k}{4}, \frac{k}{2}]$ に属する戦略 $x_1 = \frac{k}{2} - t$ に支配されていることを示そう．これも確かに $t < x_2 - k$ のとき，$(\frac{k}{2} - t - x_2)t - (\frac{k}{2} - (\frac{k}{2} - t) - x_2)(k - t) = (\frac{k}{2} - 2t)x_2$ となるので，同様な理由で第2段階で消去された残りの戦略の範囲は $[\frac{k}{4}, \frac{k}{2}]$ となる．このような消去を次々続けていくと第 m 段階で残された戦略の区間は，r が奇数と偶数のとき $m = 2r - 1, m = 2r$ と表すとすると，それぞれ，

$$\left[\frac{4^{r-1} - 1}{3 \cdot 4^{r-1}}\, k, \frac{2 \cdot 4^{r-1} + 1}{6 \cdot 4^{m-1}}\, k\right], \quad \left[\frac{4^r - 1}{3 \cdot 4^{r-1}}\, k, \frac{2 \cdot 4^{r-1} + 1}{6 \cdot 4^{r-1}}\, k\right]$$

と表すことができる．すなわち，この消去を続けていくと $x_1 = \frac{k}{3}$ 以外の戦略はすべて消去されることが分かる．したがって，$(\frac{k}{3}, \frac{k}{3})$ が逐次消去均衡となる．なお，ここでの議論はプレイヤーの数を増やしても成立し，Gibbons[3]にも紹介されている．

参考文献

1) Dutta, P.K., *Strategies and Games*, The MIT Press, Massachusetts (1999).
2) 船木由喜彦,『演習ゲーム理論』新世社 (2004).
3) Gibbons, R., *Game Theory for Applied Economists*, Princeton Univeriesty Press, Princeton (1992). 福岡正夫・須田伸一（訳）『経済学のためのゲーム理論入門』創文社, 1995年.
4) 岡田　章,『ゲーム理論』有斐閣 (1998).
5) Osborne, M.J. and A. Rubinstein, *A Course in Game Theory*, The MIT Press, Massachusetts (1994).

（ふなき・ゆきひこ，早稲田大学政治経済学術院）

階層モジュール学習

銅 谷　賢 治

12.1 はじめに

これまで教師あり学習，強化学習，教師なし学習という3つの学習の枠組みとパラメタ制御，それらの脳内機構に関して話を進めてきたが，今回はこれら学習要素を組み合わせて，いかにうまく動くシステムを構成するかを考えよう．

図12.1は，床から起き上がる運動を自分で学習するロボットである[1]．この研究を始めたのは，筆者が定式化した連続系の強化学習アルゴリズム[2]の有効性を検証したかったのと，当時ブームになり始めていた2足歩行ロボットの多くが，一度転んだら人に介護してもらわないと立ち上がれないのを情けなく思ったからである．今日，自力で起き上がれるロボットも見られるようになったが，その動きを自分で学習するという例はまだ他にない．

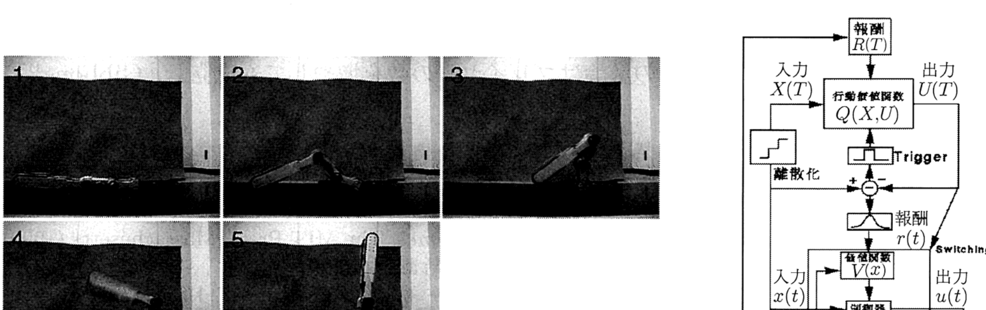


図12.1　(a) 起立運動学習ロボット．(b) 階層強化学習回路[1]．

まず強化学習プログラムをシミュレーターにつなぎ試してみたところ，学習ができるまでに何千回という試行，つまり転倒の経験が必要だった．ロボットのメカが壊れない程度の回数で学習ができるようにするにはどうすればいいか，といろいろ試行錯誤の末採用されたのが，図 12.1 (b) に示す階層強化学習システムである．上位階層は目標姿勢の離散的な系列の生成を学習し，下位階層は複数のモジュールから構成され，それぞれが異なる目標姿勢を実現するための連続値の制御を学習する．数百試行の学習のうちに，上位階層は床に寝ている状態から直立した状態をつなぐ中間姿勢の評価を，下位階層は上位から与えられた姿勢を実現するための非線形制御則を学習し，結果として図 12.1 (a) のような起立運動が実現された．

このような実際の物理システムを動かしてみようとすることで学ぶことは多い．具体的には，

1. 階層モジュール構造の設計
2. 各モジュールの入出力の情報表現
3. 各階層の報酬の定義
4. 各モジュールの学習アルゴリズムの選択
5. 各モジュールのメタパラメタの設定

などが学習のスピードや成否に大きく関わることを痛感させられた．

学習系に階層構造を導入するということは，その学習対象に関して何らかの拘束あるいはバイアスを与えることである．この実験では階層構造を我々実験者が試行錯誤的に決めてやったのだが，脳の学習系においては，これらのある部分は進化の過程で形成され，またある部分は脳の自己組織化とメタ学習の機能により実現されていると考えられる．以下，階層／モジュール構造を持つシステムの学習アルゴリズムと，その脳内での実現に関して考察しよう．

12.2 階層モジュール学習方式

12.2.1 階層混合エキスパート

図 12.2 は，階層混合エキスパート (hierarchical mixture of expert; HMoE) と呼ばれる学習アーキテクチャである[3]．ここでは 2 階層のツリー状の回路の例を示すが，各末端は通常線形の判別または回帰回路で，入力 $\boldsymbol{x}$ に対し出力

$$\boldsymbol{y}_{ij}(\boldsymbol{x}) = f(W_{ij}\boldsymbol{x}) \tag{12.1}$$

を与える．各分岐点のゲーティング回路の出力は通常，softmax 関数

$$g_i(\boldsymbol{x}) = \frac{e^{\boldsymbol{v}_i^T\boldsymbol{x}}}{\sum_k e^{\boldsymbol{v}_k^T\boldsymbol{x}}}, \quad g_{j|i}(\boldsymbol{x}) = \frac{e^{\boldsymbol{v}_{ij}^T\boldsymbol{x}}}{\sum_k e^{\boldsymbol{v}_{ik}^T\boldsymbol{x}}} \tag{12.2}$$

で与えられ，これらによる重み付けにより全体の出力

$$\boldsymbol{y} = \sum_i g_i(\boldsymbol{x}) \sum_j g_{j|i}(\boldsymbol{x}) y_{ij}(\boldsymbol{x}) \tag{12.3}$$

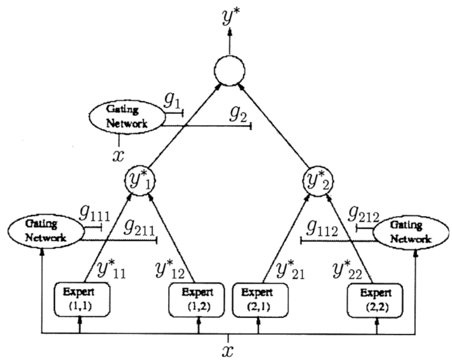


図 12.2　階層混合エキスパート回路[3]．

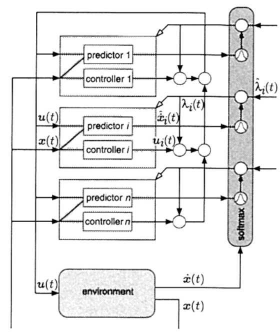


図 12.3　MOSAIC アーキテクチャ．

が与えられる．これは，木構造の判別回路を連続化したものであると同時に，データの生成の確率的モデルと見ることができる．すると学習は，教師なし学習の回に登場した混合ガウス回路と同様に，EM アルゴリズムにより行われる．

HMoE は，階層学習アーキテクチャとしては非常に汎用的で，各モジュールがどういう関数を実現するか（W_{ij} の学習）と，各モジュールをいつ使うか（$\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_{ij}$ の学習）が相補的に学習される．

HMoE の考え方を強化学習にも適用したのが，“Composite Q learning” である[4]．ここでは，回路の出力は行動価値関数であり，報酬予測が最も正しくなるように各モジュールとゲーティング回路の学習が行われる．

12.2.2 MOSAIC アーキテクチャ

複数の制御モジュールを状況に応じて切り替えて使おうというアイデアは古くからあるが，そこで問題なのは，ある状況でどの制御モジュールを使えばよいかを決めることである．Wolpert と Kawato はこの問題に対して，まず制御対象のダイナミクスの予測回路を複数用意し，どの予測回路が現在の環境のダイナミクスを最も良く予測するかによって状況を切り分け，それに応じて制御モジュールを選択する方式を提案した[5]（図 12.3），これは MOSAIC（modular selection and identification for control）アーキテクチャと呼ばれ，当初軌道追従制御のような教師あり学習に対して適用されたが[6]，その後強化学習にも拡張されている[7]．

12.2.3 階層強化学習

HMoE や MOSAIC は，どのモジュールがどのサブタスクを担当すべきかはあらかじめ規定しなくても，学習により自動的に決定されるというのが魅力的な点である．しかし，場合によっては課題の分割がうまく行かず，1 つのモジュールが多くのことを学習しようとしすぎて破綻するという結果になることもある．

そこである程度，階層構造や各モジュールの役割を規定した上で，全体としての一貫性のある学習を実現しようという方式も提案されている．有名なものとして，“Options” と呼ばれる定式化では，通常の行動（primitive action）に加え，一定の行動則と終了条件を備えた macro action を用意し，それらの中か

らどれを選ぶかを，行動価値関数を拡張した形で学習される[8]．また，MAX-Q 学習では，行動の階層構造は与えられた上で，最下層では実際の行動則，上位レベルではどの下位行動を選ぶべきかを学習する方式が定式化されている[9]．

12.2.4 Importance sampling による並列学習

実時間での学習では，学習系の複雑さの選択は難しい問題になる．単純な構造を持つ学習系ほど学習は早いが，制御対象に対して単純すぎればその到達できるパフォーマンスには限界がある．一方，多数の変数を高い解像度で考慮した学習系は，うまく学習が進んだ後には高いパフォーマンスを発揮するかもしれないが，自由度の高い分学習には多くのサンプルを必要とする．問題は，実際に学習をしてみるまでは，どれが必要十分な複雑さかはわからないという点である．

この問題に対して Uchibe らは，同じ制御対象に対して複数の異なる状態表現やアルゴリズムを持つ学習モジュールを用意し，同時並列的に学習させる方式（concurrent learning with importance sampling; CLIS）を提案している[10]．この方式の特徴は，ある時点で実際に制御を担当しているモジュールは 1 つだけでも，他のモジュールもその同じ行動を自分が取る確率に応じて重み付けをして学習を行うという点である．与えられた状態での各モジュールの自信，つまり状態価値をもとにどのモジュールを実際に用いるか決めてやると，学習の当初には単純なモジュールが採用されるが，経験を積むにつれてより複雑な学習モジュールが選択され，より高いパフォーマンスを実現する．重要なのは，複雑なモジュールを単独で学習させると非常に時間がかかるのに，単純なモジュールの生成した準最適解の経験から，学習が加速されるという点である．

12.3 脳の階層モジュール学習

脳の回路のモジュール構造は，様々なレベルで知られている．小脳は，小脳皮質と小脳核，下オリーブ核をつなぐマイクロゾーンという機能単位から構成されている．大脳基底核の線条体には，マトリソームと呼ばれるモジュール構造が見られる．大脳皮質は数十の領野から階層的に構成された上に，それぞれの領野の中にはカラムと呼ばれる機能単位が並んでいる．これらのモジュール構造がどのように形成されるかに関して，特に大脳皮質のカラム構造については，教師なし学習の立場から多数のモデルが提案されているが，小脳，大脳基底核に関してはまだモデル化は十分でない．さらに，例えば手の運動制御に関与する大脳皮質と小脳，大脳基底核のモジュールの間にいかに適切に結合をつけるか，といったグローバルな自己組織化のメカニズムは，重要な問題である．

12.3.1 モジュールの選択

今日の脳活動計測実験の多くは，ある処理を行っているときの脳活動パターンと，視覚入力や運動出力はほとんど同じだがその処理をしなくてよい対照条件下での脳活動パターンを比較して，脳のどの場所がどの処理に関与するかを示す，というパラダイムに頼っている．しかし，ある処理が必要，というとき

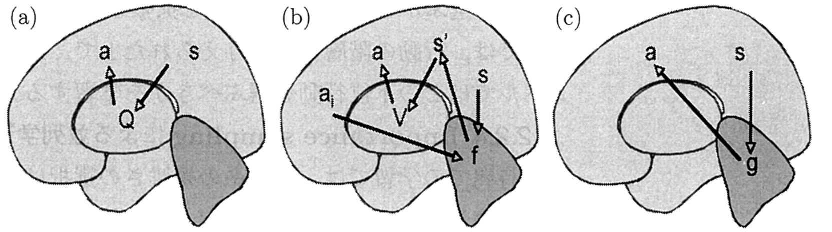


図 12.4　行動選択のアーキテクチャ．(a) 行動価値によるモデルフリーの選択．(b) 予測モデルによるモデルベースの探索．(c) 刺激—応答の連合．

にそれを担当すべき脳部位がきちんと活動してくれる仕組みは，実はまだよくわかっていない．

Osu らは，異なる粘性抵抗場の中で手を動かす運動の学習が，トレーニングの順序や手がかり刺激などに応じて，区別できたり混同されたりする，という結果を報告している[11)]．モジュール選択には，MOSAIC モデルが仮定するような，予測モデルとの比較によるボトムアップな要素と，視覚などからの連想によるトップダウンの要素との両者が関係していそうである．

12.3.2 モデルベースとモデルフリーのアーキテクチャ

図 12.4 は，強化学習での行動選択の典型的な方式を図示したものである．モデルフリーの選択 (a) では，行動の選択肢ごとの報酬予測値が記憶され，与えられた状態の下でその最大値を与えるものが選択される．モデルベースの選択 (b) では，ある状態である行動を取ったときに行き着く状態を予測し，その予測された状態の評価をもとにどの行動を取るかが決定される．大脳基底核の回で紹介したように，行動価値が線条体ニューロンにより表現されているとすると[12)]，モデルフリーの選択は大脳基底核を中心とした回路で行われ得るはずである．一方，行動の結果を予測する順モデルが小脳にあるとすると，モデルベースの行動選択は，小脳と大脳基底核を含むネットワークで可能なはずである．さらにいずれの方式であれ，ある状態ではある行動を取ればよい，ということがわかってしまえば，その入出力写像を教師あり学習により覚え込むことも可能なはずである (c)．

では，同じ行動を取るのに複数の処理アーキテクチャが可能なとき，そのどれを選ぶべきであろうか？ 前述の CLIS[10)]では，異なるアーキテクチャごとに報酬予測値を状態価値関数として学習し，それが大きいものを選ぶ方式が取られている．最近 Daw らは，予測報酬の期待値だけなく，その分布まで考慮した評価を行い，予測の分散の小さいアーキテクチャが選択されるというモデルを提案し，ラットの行動実験データを再現することに成功している[13)]．

12.4 おわりに

以上，計算理論の立場から提案された階層モジュール学習方式を紹介し，その脳回路との関連を探ろうとしてみた．小脳や大脳皮質など局所の回路のモデ

ルはこれまで多数提案されているのに対し，脳のグローバルな回路の組織化と選択の機構に関しては，まだ理論化が十分進んでいるとは言えない．しかし一方で，fMRI 実験などにより脳のグローバルな活動を捉えるデータは近年爆発的に増えてきており，階層モジュール学習と制御の計算モデル研究は，今後ますます重要になると思われる．

参考文献

1) J. Morimoto and K. Doya. Acquisition of stand-up behavior by a real robot using hierarchical reinforcement learning. *Robotics and Autonomous Systems*, Vol.**36**, pp.37–51, 2001.
2) K. Doya. Reinforcement learning in continuous time and space. *Neural Computation*, Vol.**12**, pp.215–245, 2000.
3) M.I. Jordan and R.A. Jacobs. Hierarchical mixtures of experts and the EM algorithm. *Neural Computation*, Vol.**6**, pp.181–214, 1994.
4) S.P. Singh. Transfer of learning by composing solutions of elemental sequential tasks. *Machine Learning*, Vol.**8**, pp.323–340, 1992.
5) D.M. Wolpert and M. Kawato. Multiple paired forward and inverse models for motor control. *Neural Networks*, Vol.**11**, pp.1317–1329, 1998.
6) M. Haruno, D.M. Wolpert, and M. Kawato. Mosaic model for sensorimotor learning and control. *Neural Computation*, Vol.**13**, pp.2201–2220, 2001.
7) K. Doya, K. Samejima, K. Katagiri, and M. Kawato. Multiple model-based reinforcement learning. *Neural Computation*, Vol.**14**, pp.1347–1369, 2002.
8) R.S. Sutton, D. Precup, and S. Singh. Between mdps and semi-mdps: A framework for temporal abstraction in reinforcement learning. *Artificial Intelligence*, Vol.**112**, pp.181–211, 1999.
9) T.G. Dietterich. Hierarchical reinforcement learning with the maxq value function decomposition. *Journal of Artificial Intelligence Research*, Vol.**13**, pp.227–303, 2000.
10) E. Uchibe and K. Doya. Competitive-cooperative-concurrent reinforcement learning with importance sampling. In *Proc. of International Conference on Simulation of Adaptive Behavior: From Animals and Animats*, pp.287–296, 2004.
11) R. Osu, S. Hirai, T. Yoshioka, and M. Kawato. Random presentation enables subjects to adapt to two opposing forces on the hand. *Nature Neuroscience*. Vol.**7**, pp.111–112, 2002.
12) K. Samejima, K. Ueda, K. Doya, and M. Kimura. Representation of action-specific reward values in the striatum. *Science*, 2005.
13) N.D. Daw, Y. Niv, and P. Dayan. Uncertainty-based competition between prefrontal and dorsolateral striatal systems for behavioral control. *Nature Neuroscience*, Vol.**8**, pp.1704–1711, 2005.

（どーや・けんじ，沖縄科学技術大学院大学先行研究）

特　集（2006年8月号予告）

ネットワーク科学の数理
その基礎から応用まで

本体952円

編集後記

GWに帰省．畑のひろがる風景の開放感は格別で，折りしも薫風渡る青空に色とりどりのこいのぼりが吹き流れている様子には自然と気分が高揚してくる．窪田先生の巻頭記事「逆二乗法則の魅力」にとり上げられた事柄は，力学の教程では「外伝」になるのだろうか．「開放感」ある誌面作りには欠かせない種類の話題であると感じている．　（平勢）

＊　　＊

先日，湯川・朝永生誕百年記念企画展に行ってきました．湯川博士が孤高派なら，朝永博士は庶民派の印象が強かったです．朝永博士の随筆は，ご自身の病弱だった体験や武蔵野の住まい，飼い猫への想いなど情感溢れるものが多く，まさに庶民にも親しみがもてます．この年を機にご一読をお薦めします．　（伊崎）

数　理　科　学　7月号

2006年7月1日発行　　発行人　森　平　勇　三

数理科学編集部
TEL.(03) 5474-8816
FAX.(03) 5474-8817

編集スタッフ
平勢耕介　伊崎修通
大溝良平

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp　まで．

発行所 ©　株式会社 サイエンス社　TEL.(03) 5474-8500（代表）
〒151-0051 東京都渋谷区千駄ヶ谷1-3-25　振替 00170-7-2387　(03) 5474-8600（広告部）

印刷・製本　三美印刷株式会社　山岡景仁